Chapitre 12 : Limites et continuité

Table des matières

Les premières définitions de limites et de continuité sont énoncées par Louis Augustin Cauchy. La rigueur des énoncés reste toutefois encore relative, contrairement au mathématicien allemand Karl Weierstraßqui apporte des définitions rigoureuses. Weierstrass se signale par sa volonté d'utiliser l'algèbre pour définir les concepts de l'analyse. Les principes de la théorie des fonctions doivent reposer selon lui sur des principes algébriques clairs.

Karl Weierstraß
(1815-1897)

1 Limite d'une fonction en un point

Notation : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

1.1 Définition et premières propriétés de la limite

Définition 1.1 (voisinage d'un point)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Un voisinage de a est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle de la forme suivante :
- lorsque $a \in \mathbb{R}$, un intervalle de la forme $[a-\eta\,; a+\eta]$, avec $\eta > 0$;
- lorsque $a = +\infty$, un intervalle de la forme $[R\,; +\infty[$, avec $R \in \mathbb{R}$;
- lorsque $a = -\infty$, un intervalle de la forme $]-\infty\,; R]$, avec $R \in \mathbb{R}$.

Propriété vraie au voisinage d'un point : Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit qu'une propriété portant sur les réels est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur au moins un voisinage de a, c'est-à-dire :
- lorsque $a \in \mathbb{R}$, si elle est vraie sur un intervalle de la forme $[a-\eta\,; a+\eta]$, avec $\eta > 0$;
- lorsque $a = +\infty$, si elle est vraie sur un intervalle de la forme $[R\,; +\infty[$, avec $R \in \mathbb{R}$;
- lorsque $a = -\infty$, si elle est vraie sur un intervalle de la forme $]-\infty\,; R]$, avec $R \in \mathbb{R}$.

Définition 1.2 (point adhérent à un intervalle)

Soit I un intervalle non trivial (c'est-à-dire un intervalle non vide et non réduit à un point).
Un point adhérent à I est un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ qui appartient à I ou qui est l'une des deux extrémités (éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$) de I.

Remarque : Si a est un point adhérent à un intervalle I, alors l'intersection de I avec n'importe quel voisinage de a est non vide.

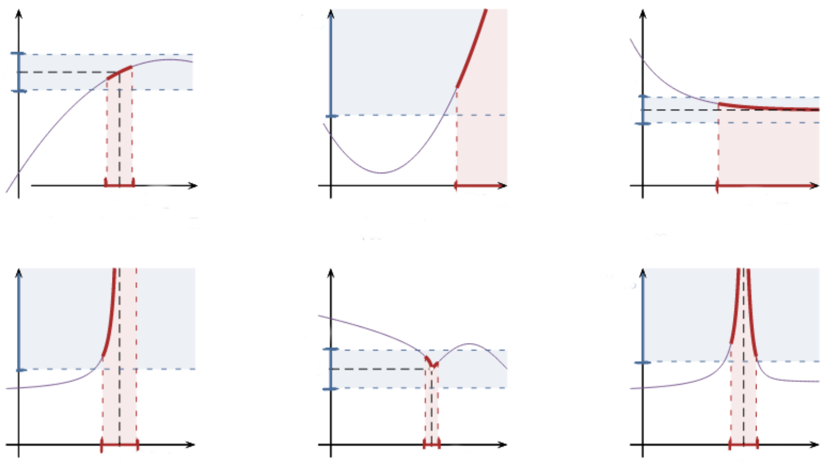
Définition 1.3 (limite finie ou infinie d'une fonction)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial, et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I.

1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ lorsque : $\forall \varepsilon > 0$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ au voisinage de a.
   Autrement dit :
   - si $a \in \mathbb{R}$: $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow$
   - si $a = +\infty$: $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow$
   - si $a = -\infty$: $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow$
2. On dit que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ lorsque : $\forall A \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant A$ au voisinage de a.
   Autrement dit :
   - si $a \in \mathbb{R}$: $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \Leftrightarrow$
   - si $a = +\infty$: $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \Leftrightarrow$
   - si $a = -\infty$: $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty \Leftrightarrow$
3. On dit que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$ lorsque : $\forall A \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant A$ au voisinage de a.
   Autrement dit :
   - si $a \in \mathbb{R}$: $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty \Leftrightarrow$
   - si $a = +\infty$: $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \Leftrightarrow$
   - si $a = -\infty$: $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty \Leftrightarrow$

Remarque : Pour $\ell \in \mathbb{R}$: $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow f(x)-\ell \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow |f(x)-\ell| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

Exemple 1.4 : Compléter les graphiques suivants en stipulant de quelle type de limite il s'agit.



Théorème 1.5 (caractérisation séquentielle de la limite)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial, soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I, et soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall (x_n) \in I^{\mathbb{N}},\, x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \implies f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\right)$$

Remarque : Cette caractérisation permet de démontrer la plupart des résultats ci-dessous en utilisant les propriétés déjà démontrées pour les suites.

Proposition 1.6 (unicité de la limite)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial, et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I. S'il existe ℓ et $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell'$, alors $\ell = \ell'$.

Notation : On peut donc parler de ***la* limite de f en a** (lorsque celle-ci existe), notée $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou $\lim\limits_{a} f$.

Non existence d'une limite : Pour montrer que f n'a pas de limite en a, il suffit de trouver deux suites (x_n) et (y_n) qui tendent vers a et telles que les suites $\big(f(x_n)\big)$ et $\big(f(y_n)\big)$ n'ont pas la même limite.

Exemple 1.7 : Montrer que la fonction cos n'admet pas de limite en $+\infty$.

Proposition 1.8 (limite en un point où la fonction est définie)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial, et soit $a \in I$.
Si f possède une limite en a, alors celle-ci est finie et est égale à $f(a)$.

Proposition 1.9 (limite finie en $a \implies$ bornée au voisinage de a)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial, et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I.
Si f possède une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.

1.2 Limites à droite et à gauche

Définition 1.10 (limite à droite, limite à gauche)

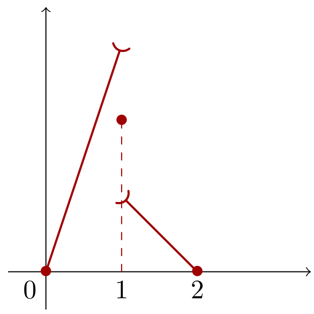
Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle non trivial I, soit $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à I, et soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. On suppose que f est définie à droite de a, c'est-à-dire que $I \cap]a\,;+\infty[\neq \emptyset$.
   On dit alors que $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x>a}}{\longrightarrow} \ell$ ou $f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell$ lorsque la restriction de f à $I \cap]a\,;+\infty[$ a pour limite ℓ en a. Autrement dit :
   - si $\ell \in \mathbb{R}$: $f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow$
   - si $\ell = +\infty$: $f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} +\infty \Leftrightarrow$
   - si $\ell = -\infty$: $f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} -\infty \Leftrightarrow$
2. On suppose que f est définie à gauche de a, c'est-à-dire que $I \cap]-\infty\,;a[\neq \emptyset$.
   On dit alors que $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x<a}}{\longrightarrow} \ell$ ou $f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} \ell$ lorsque la restriction de f à $I \cap]-\infty\,;a[$ a pour limite ℓ en a. Autrement dit :
   - si $\ell \in \mathbb{R}$: $f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow$
   - si $\ell = +\infty$: $f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} +\infty \Leftrightarrow$
   - si $\ell = -\infty$: $f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} -\infty \Leftrightarrow$

Notation : On a aussi unicité des limites à droite et à gauche (lorsqu'elles existent), notées $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{a^+} f$ pour la limite à droite, et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{a^-} f$ pour la limite à gauche.

Exemple 1.11 : Les limites à droite et à gauche en a peuvent être différentes de la valeur que la fonction prend en a. Ci-contre une représentation du graphe d'une fonction $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ qui vérifie $f(1) = 2$ ainsi que :

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \text{ et } \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$$



Proposition 1.12 (caractérisation de la limite en un point intérieur)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial, soit a un point intérieur de I (ce qui signifie qu'il existe un voisinage de a contenu dans I), et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence :

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell \\ f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} \ell \\ f(a) = \ell \end{cases}$$

Non existence d'une limite : En particulier, si la limite à gauche est différente de la limite à droite en a, alors f n'a pas de limite en a. De même si une des deux limites à droite ou à gauche est différente de $f(a)$.

1.3 Limite épointée

Définition 1.13 (limite épointée)

Soit I un intervalle non trivial, soit $a \in I$, soit f une fonction réelle définie sur $I \backslash \{a\}$, et soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
On définit la propriété « $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell$ » (ce que l'on note plus simplement $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le fait que f n'est pas définie en a) de la manière suivante :

1. lorsque $\ell \in \mathbb{R}$: $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow$
2. lorsque $\ell = +\infty$: $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} +\infty \Leftrightarrow$
3. lorsque $\ell = -\infty$: $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} -\infty \Leftrightarrow$

Notation : On a aussi unicité de la limite épointée (lorsqu'elle existe), notée $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$.

Proposition 1.14 (caractérisation de la limite épointée en un point intérieur)

Soit I un intervalle non trivial, soit a un point intérieur de I, soit f une fonction réelle définie sur $I \backslash \{a\}$ (f est donc définie à la fois à gauche et à droite de a), et soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
On a l'équivalence :

$$f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell \\ f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} \ell \end{cases}$$

Remarque : Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial, soit $a \in I$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$.

1. On a l'implication : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \implies f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell$ (par restriction de f à $I \backslash \{a\}$).
2. On a l'équivalence : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell \\ f(a) = \ell \end{cases}$

Exemple 1.15 : Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \mathbf{e}^{\frac{1}{x^2}}$.
Déterminer les limites à droite et à gauche de f en 0 et montrer que f admet une limite épointée en 0.

1.4 Opérations sur les limites

Tous les résultats sur les opérations algébriques ($+$, $-$, $\times$, $\div$, combinaisons linéaires) de limites vus pour les suites s'adaptent au cas des fonctions (également pour les limites à droite, à gauche et épointées).

Théorème 1.16 (composition de limites de fonctions)

Soient f et g deux fonctions réelles définies respectivement sur I et J, intervalles non triviaux, telles que $f(I) \subset J$ (de telle sorte que l'on puisse considérer la composée $g \circ f$).
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à J, et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{f} & J & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ a & & b & & \ell \end{array}$$

Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$ et $g(y) \underset{y \to b}{\longrightarrow} \ell$, alors $g \circ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

Exemple 1.17 : Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes puis étudier ses fonctions au voisinage de 1 : $f : x \mapsto \dfrac{\tan\left(-\frac{\pi}{2}x\right)}{(\ln(x))^2}$ et $g : x \mapsto \dfrac{\tan\left(-\frac{\pi}{2}x\right)}{\ln(x)}$.

1.5 Propriétés liées à l'ordre

Théorème 1.18 (stabilité des inégalités larges par passage à la limite)

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur un intervalle I non trivial, et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I. On suppose que :

1. $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x)$;
2. f et g admettent des limites finies en a.

Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Remarque : Comme pour les suites, les inégalités strictes ne sont pas nécessairement préservées par passage à la limite. Par exemple : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{x} > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Théorème 1.19 (théorèmes d'existence de limites par comparaison)

Soient f, g et h trois fonctions réelles définies sur un intervalle I non trivial, et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I.

1. *Théorème de convergence par encadrement (ou théorème des gendarmes) :*
   On suppose que $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.
   Si les fonctions f et h admettent la même limite finie ℓ en a, alors on a aussi $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.
2. *Théorème de divergence par minoration :*
   On suppose que $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x)$.
   Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$, alors on a aussi $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$.
3. *Théorème de divergence par majoration :*
   On suppose que $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x)$.
   Si $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$, alors on a aussi $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$.

Remarque : Pour les deux théorèmes précédents, il suffit que les inégalités sur les fonctions soient vérifiées au voisinage de a. De plus, toutes ces propriétés sont également vraies pour les limites à gauche, à droite et épointées.

Théorème 1.20 (théorème de la limite monotone)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle non vide de la forme $]a\,;b[$, avec a et $b \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si f est monotone, alors elle admet des limites (finies ou infinies) en a et en b. Plus précisément :

1. On suppose que f est croissante.
   (a) Si f est majorée alors f admet une limite finie en b. Sinon, $f(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} +\infty$.
   (b) Si f est minorée alors f admet une limite finie en a. Sinon, $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$.
2. On suppose que f est décroissante.
   (a) Si f est majorée alors f admet une limite finie en a. Sinon, $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$.
   (b) Si f est minorée alors f admet une limite finie en b. Sinon, $f(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} -\infty$.

2 Continuité

2.1 Définition de la continuité et premières propriétés

Définition 2.1 (fonction continue)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial.
- Soit $a \in I$. On dit que f est <u>continue en a</u> lorsque $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$.
- On dit que f est continue sur I lorsque f est continue en tout point de I.

Remarque : D'après la proposition 1.8 : f est continue en a si et seulement si f admet une limite en a. En effet cette limite, lorsqu'elle existe, est nécessairement finie et égale à $f(a)$.

Continuité des fonctions usuelles :
Les fonctions suivantes sont continues sur leurs ensembles de définition :
- les fonctions polynomiales ;
- les fonctions exponentielles et logarithmes ;
- les fonctions puissances ;
- les fonctions circulaires (cos, sin, tan) et circulaires réciproques (Arccos, Arcsin et Arctan) ;
- les fonctions hyperboliques (ch et sh) ;
- la fonction valeur absolue.

La fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (discontinuité en chaque entier $k \in \mathbb{Z}$).

Remarque : Pour une fonction f dont l'ensemble de définition D est une réunion d'intervalles (exemples : fonction inverse, fonction tangente), dire que f est continue sur D signifie que les restrictions de f à chacun des intervalles qui composent D sont continues.

Théorème 2.2 (caractérisation séquentielle de la continuité en un point)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial, et soit $a \in I$.

$$f \text{ continue en } a \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall (x_n) \in I^{\mathbb{N}},\ x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \implies f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)\right)$$

2.2 Continuité à droite et à gauche

Définition 2.3 (fonction continue à droite et à gauche)

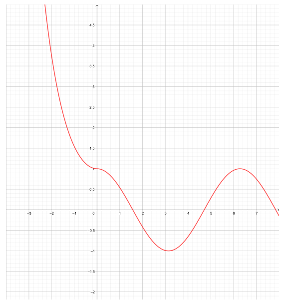
Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial, et soit $a \in I$.
1. Lorsque f est définie à droite de a, on dit que f est <u>continue à droite en a</u> si $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} f(a)$.
2. Lorsque f est définie à gauche de a, on dit que f est <u>continue à gauche en a</u> si $f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} f(a)$.

Proposition 2.4 (caractérisation de la continuité par la continuité à gauche et à droite)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial, et soit a un point intérieur de I.
La fonction f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite en a.

Exemple 2.5 : Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ où :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \operatorname{ch}(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$



2.3 Opérations sur les fonctions continues

Proposition 2.6 (stabilité par les opérations algébriques)

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur un intervalle I non trivial, et soit $a \in I$.
On suppose que f et g sont continues en a. Alors :

1. Pour tous λ et $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est continue en a.
2. fg est continue en a.
3. Si g ne s'annule pas en a, alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont bien définies au voisinage de a et elles sont continues en a.

Remarque : Ces propriétés sont aussi valables pour la continuité à droite ou à gauche.

Conséquences : Soit I un intervalle non trivial.

1. L'ensemble $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur I est stable par somme, produit et opposé.
2. L'ensemble $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ est aussi stable par combinaison linéaire.
3. Le quotient de deux fonctions continues sur I est, lorsqu'il est bien défini (c'est-à-dire lorsque le dénominateur ne s'annule pas sur I), une fonction continue sur I.

Proposition 2.7 (stabilité par composition)

Soient f et g deux fonctions réelles définies respectivement sur I et J, intervalles non triviaux, telles que $f(I) \subset J$, et soit $a \in I$.

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{f} & J & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ a & & f(a) & & \end{array}$$

Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Conséquence : La composée de deux fonctions continues est continue.

Exemple 2.8 : Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \text{ pour } x \neq 0 \\ 0 \text{ pour } x = 0 \end{cases}$ est continue.

2.4 Prolongement par continuité

Rappel : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \notin D$.
Un prolongement de f sur $D \cup \{a\}$ est une fonction $\widetilde{f} : D \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in D$, $\widetilde{f}(x) = f(x)$.
Sans précision supplémentaire, $\widetilde{f}(a)$ peut être égal à n'importe quel réel.

Définition 2.9 (prolongement par continuité d'une fonction)

Soit I un intervalle non trivial, soit $a \in I$, et soit f une fonction réelle définie sur $I \backslash \{a\}$.
On appelle prolongement par continuité de f en a une fonction qui est un prolongement de f sur I et qui est continue en a.
Lorsqu'une telle fonction existe, on dit que f est prolongeable par continuité en a.

Remarque : Dans le cas où f est déjà continue sur $I \backslash \{a\}$, on parle aussi de « prolongement par continuité sur I », car la fonction ainsi prolongée est continue sur I.

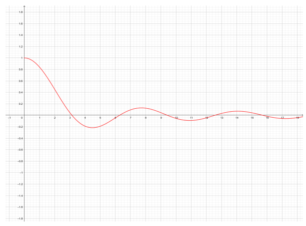
Proposition 2.10 (condition d'existence d'un prolongement par continuité)

Soit I un intervalle non trivial, soit $a \in I$, et soit f une fonction réelle définie sur $I \backslash \{a\}$.
La fonction f est prolongeable par continuité en a si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$ existe et est finie.
Dans ce cas, il existe un unique prolongement par continuité de f en a, qui est la fonction

$$\widetilde{f} : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{array}$$

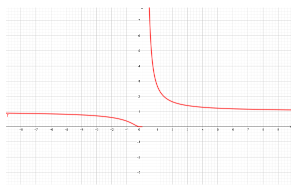
où $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$.

Exemple 2.11 : Soit $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?



Cas particulier : Lorsque f est définie à gauche et à droite de a (mais pas en a), f est prolongeable par continuité en a si et seulement si les limites de f à droite et à gauche en a existent, sont finies et sont égales.

Exemple 2.12 : Soit $g : x \mapsto \mathbf{e}^{\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
Peut-on prolonger cette fonction par continuité en 0 ?



3 Continuité sur un intervalle : propriétés globales

3.1 Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences

Théorème 3.1 (théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle non trivial I, et soient a et b dans I tels que $a \leqslant b$.
On suppose que f est **continue**.
Alors pour tout réel y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = y_0$.

Application : *Recherche d'un zéro d'une fonction continue par dichotomie*
Soit f une fonction continue sur un intervalle I qui change de signe (i.e. $\exists(a,b) \in I^2$, $a \leqslant b$ et $f(a)f(b) \leqslant 0$).
On dit que $x \in I$ est un zéro de f lorsque $f(x) = 0$. L'algorithme suivant donne un encadrement de plus en plus fin d'un zéro de f.

1. Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que f admet un zéro dans $[a,b]$.
2. On détermine le signe de $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Si $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et $f(a)$ sont de signes contraires (i.e. $f\left(\frac{a+b}{2}\right)f(a) \leqslant 0$), on recommence au point 1. en considérant le segment $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$. Sinon, ceux sont $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et $f(b)$ qui sont de signes contraires, on recommence alors au point 1. en considérant le segment $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$.

Méthode de la dichotomie sous Python :

```
def dichotomie(f,a,b,eps) :
    while b-a > eps :
        m = (a+b)/2
        if f(a)*f(m) <= 0 :
            b = m
        else :
            a = m
    return (a+b)/2
```

Corollaire 3.2 (théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction strictement monotone)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle non trivial I, et soient a et b dans I tels que $a \leqslant b$.
On suppose que f est **continue** et **strictement monotone**.
Alors pour tout réel y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un **unique** $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = y_0$.

Corollaire 3.3 (image d'un intervalle par une fonction continue)

Soit f une fonction réelle définie et continue sur un intervalle I non trivial.
Alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exemple 3.4 : Déterminer explicitement $\cos(\mathbb{R})$, $\text{ch}(\mathbb{R})$ et $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)$.

3.2 Continuité et bijectivité

Théorème 3.5 (théorème de la bijection)

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial.
On suppose que f est **continue** et **strictement monotone**.
Alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle image $f(I)$.
De plus, la bijection réciproque est continue et de même monotonie que f.

3.3 Continuité sur un segment

Rappel : On appelle segment tout intervalle de $\mathbb{R}$ du type $[a\,;b]$ avec a,b réels tels que $a < b$.

Théorème 3.6 (une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes)

Soient deux réels a et b tels que $a < b$, et soit f une fonction réelle définie sur le segment $[a\,;b]$.
On suppose que f est continue.
Alors la fonction f est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'elle admet un minimum et un maximum. Autrement dit, $\exists(\alpha\,,\beta) \in [a\,;b]^2$, $\forall x \in [a\,;b]$, $f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta)$.

Exemple 3.7 : La fonction cos est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\cos([0{,}2\pi]) = [-1{,}1] = [\cos(\pi), \cos(0)]$.

Corollaire 3.8 (image d'un segment par une fonction continue)

Soient deux réels a et b tels que $a < b$, et soit f une fonction réelle définie sur le segment $[a\,;b]$.
On suppose que f est continue.
Alors $f([a\,;b])$ est un segment ou un singleton. Plus précisément, $f([a\,;b]) = \left[\min\limits_{x\in[a\,;b]} f(x)\,;\, \max\limits_{x\in[a\,;b]} f(x)\right]$.

4 Extension des notions aux fonctions complexes

Soit $f : I \to \mathbb{C}$, avec I un intervalle non trivial. On peut définir de la même manière que pour les fonctions réelles :

1. la notion de limite **finie** en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ point adhérent à I (la limite sera un nombre complexe).
   Dans ce cadre, $|f(x) - \ell|$ est un **module** (au lieu d'une valeur absolue), et $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ s'interprète géométriquement par « $f(x)$ est dans le disque fermé de centre ℓ et de rayon ε ».
2. les notions de limites (finies) à gauche, à droite, épointées
3. les notions de continuité, de continuité à droite et à gauche, de prolongement par continuité

De même que dans le cas des fonctions réelles, on a **unicité de la limite**, sous réserve d'existence.

Théorème 4.1 (caractérisation de la limite à l'aide des parties réelles et imaginaires)

Soit f une fonction complexe définie sur un intervalle I non trivial, soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I, et soit $\ell \in \mathbb{C}$.

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \mathrm{Re}(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell) \\ \mathrm{Im}(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\ell) \end{cases}$$

Corollaire 4.2 (caractérisation de la continuité à l'aide des parties réelles et imaginaires)

Soit f une fonction complexe définie sur un intervalle I non trivial.

1. Pour tout $a \in I$, f est continue en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues en a.
2. f est continue sur I si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues sur I.

Remarque : On a des caractérisations similaires pour :

- les limites à gauche, à droite, épointées ;
- la continuité à gauche et à droite ;
- les fonctions prolongeables par continuité.

Les propriétés suivantes restent vraies pour les fonctions complexes :

1. caractérisation séquentielle de la limite et de la continuité ;
2. opérations algébriques sur les limites, et par conséquent propriétés de stabilité des fonctions continues par ces opérations ;
3. composition de limites pour $g \circ f$ avec $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{C}$ (avec I et J des intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset J$), et par conséquent $g \circ f$ est continue si les fonctions f et g sont continues.

Théorème 4.3 (continuité d'une fonction définie avec l'exponentielle complexe)

Soit f une fonction complexe définie sur un intervalle I non trivial.
Si f est continue, alors la fonction composée $\exp \circ f : I \to \mathbb{C}$ est continue.

Mise en garde : toutes les propriétés liées à l'ordre sur $\mathbb{R}$ n'ont pas lieu d'être pour les fonctions complexes.