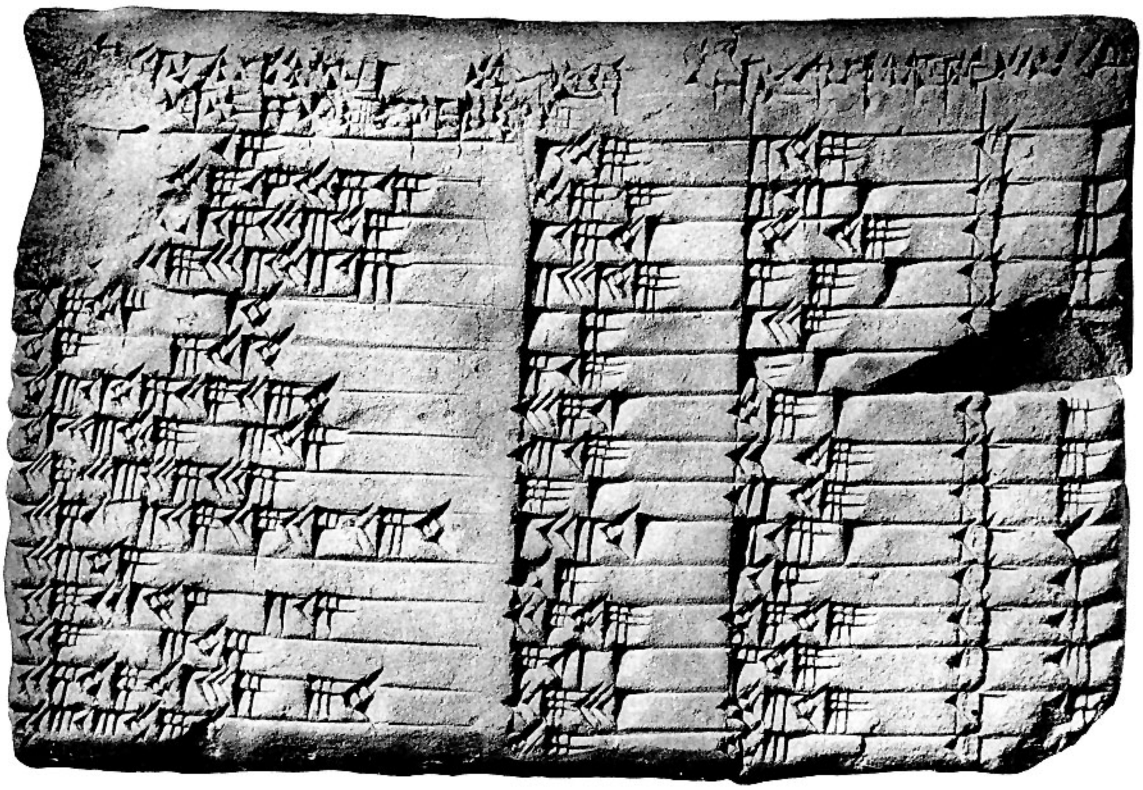
Cahier de calcul

— pratique et entraînement —



Plimpton 322, tablette d'argile babylonienne (1 800 av. JC)

Cette tablette, vieille de près de 4 000 ans, donne une liste de triplets pythagoriciens, c'est-à-dire de triplets (a, b, c) de nombres entiers vérifiant $a^2 + b^2 = c^2$.

Ce cahier de calcul a été écrit collectivement.

Coordination

Colas Bardavid

Équipe des participants

Vincent Bayle, Romain Basson, Olivier Bertrand, Ménard Bourgade, Julien Bureaux, Alain Camanes, Mathieu Charlot, Mathilde Colin de Verdière, Keven Commault, Miguel Concy, Rémy Eupherte, Hélène Gros, Audrey Hechner, Florian Hechner, Marie Hézard, Nicolas Laillet, Valérie Le Blanc, Thierry Limoges, Quang-Thai Ngo, Xavier Pellegrin, Fabien Pellegrini, Jean-Louis Pourtier, Valérie Robert, Jean-Pierre Técourt, Guillaume Tomasini, Marc Tenti

Adaptation pour le cours suivi par les PCSI 803 du lycée Déodat de Séverac

Hugo Bringuier

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf Schmitzer (The Noun Project).

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à écrire aux adresses `cahierdecalcul@gmail.com` et `hugo.bringuier@hotmail.fr`.

Sommaire

Présentation et mode d'emploi

Qu'est-ce que ce cahier ?

Ce cahier est un cahier de calcul, basé sur le programme de mathématiques collège/lycée ainsi que sur le programme de première année de Post-Bac. Il ne se substitue en aucun cas aux TD donnés par votre professeur de maths mais est un outil pour vous aider à vous améliorer en calcul.

À quoi sert-il ?

En mathématiques, la technique et le calcul sont fondamentaux.

Sans technique, il est impossible de correctement appréhender une question mathématique. De même que l'on doit faire des gammes et beaucoup pratiquer lorsque l'on apprend un instrument, on doit calculer régulièrement lorsque l'on pratique les mathématiques, notamment en CPGE et dans les études Post-Bac.

Comment est-il organisé ?

Ce cahier comporte plusieurs parties :

- Un sommaire vous permettant d'avoir d'un seul coup d'œil les différentes fiches de ce cahier de calcul, et de noter celles que vous avez déjà faites ou pas.
- Une partie de **calculs élémentaires**, faisables dès le début de la première année, et centrée sur les calculs « de base » : développement, factorisation, racines carrées, fractions, *etc.* Cela peut vous paraître simple, mais sachez que ce type d'erreur de calcul est toujours fréquent, même en spé, même sur les copies de concours. Travailler les techniques élémentaires de calcul vous facilitera grandement la vie !
- Une partie liée au programme de première année : sont indiqués précisément les chapitres nécessaires pour pouvoir aborder chaque fiche de calculs.

Chaque fiche de calculs est organisée ainsi :

- Une présentation du thème de la fiche et des prérequis (notamment, pour des techniques propres à certaines filières, on précise de quelle filière il s'agit)
- Une liste de calculs, dont le temps de résolution (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par une (), deux (), trois () ou quatre () horloges.
- Vous êtes invité à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

Comment l'utiliser ?

Un travail personnalisé.

Ce cahier de calcul est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Choisissez les calculs que vous faites en fonction des difficultés que vous rencontrez et des chapitres que vous étudiez, ou bien en fonction des conseils de votre professeur de mathématiques.

Ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre, mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

Un travail régulier.

Essayez de pratiquer les calculs à un rythme régulier : **une quinzaine de minutes par jour** par exemple.

Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire 10 fiches par jour pendant les vacances » .

Point important : pour réussir à calculer, il faut répéter. C'est pour cela que nous avons mis plusieurs exemples illustrant chaque technique de calcul.

Un travail efficace.

Attention à l'utilisation des réponses et des corrigés : il est important de chercher suffisamment par soi-même avant de regarder les réponses et/ou les corrigés. Il faut vraiment **faire les calculs** afin que le corrigé vous soit profitable.

Fiche de calcul n° 1

Fractions

Prérequis
Règles de calcul sur les fractions.

Calculs dans l'ensemble des rationnels

Calcul 1.1 — Simplification de fractions.

Simplifier les fractions suivantes (la lettre k désigne un entier naturel non nul).

a) $\dfrac{32}{40}$ ....

b) $8^3 \times \dfrac{1}{4^2}$ ....

c) $\dfrac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$ ....

d) $\dfrac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$ ....

Calcul 1.2 — Sommes, produits, quotients, puissances.

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\dfrac{2}{4} - \dfrac{1}{3}$ ....

b) $\dfrac{2}{3} - 0{,}2$ ....

c) $\dfrac{36}{25} \times \dfrac{15}{12} \times 5$ ....

d) $-\dfrac{2}{15} \div \left(-\dfrac{6}{5}\right)$ ....

Calcul 1.3

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $(2 \times 3 \times 5 \times 7)(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7})$ ....

b) $\left(\dfrac{136}{15} - \dfrac{28}{5} + \dfrac{62}{10}\right) \times \dfrac{21}{24}$ ....

c) $\dfrac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$ ....

d) $\dfrac{1\ 978 \times 1\ 979 + 1\ 980 \times 21 + 1958}{1\ 980 \times 1\ 979 - 1\ 978 \times 1\ 979}$ ....

Calcul 1.4 — Un petit calcul.

Écrire $\dfrac{0{,}5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \dfrac{0{,}5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0{,}2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3{,}5}$ sous forme d'une fraction irréductible. ....

Calcul 1.5 — Le calcul littéral à la rescousse.

En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

a) $\dfrac{2\ 022}{(-2\ 022)^2 + (-2\ 021)(2\ 023)}$ ..

b) $\dfrac{2\ 021^2}{2\ 020^2 + 2\ 022^2 - 2}$ ....

c) $\dfrac{1\ 235 \times 2\ 469 - 1\ 234}{1\ 234 \times 2\ 469 + 1\ 235}$ ....

d) $\dfrac{4\ 002}{1\ 000 \times 1\ 002 - 999 \times 1\ 001}$ ...

Calcul 1.6 — **Les fractions et le calcul littéral.**

Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

a) $\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ ....

b) $\dfrac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \dfrac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, distincts deux à deux. ....

c) $\dfrac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1, 2\}$. ....

Calcul 1.7 — **Le quotient de deux sommes de Gauss.**

Simplifier $\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n^2} k}{\sum\limits_{k=0}^{n} k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. ....

Calcul 1.8 — **Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.**

Soit $k \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$ et $x \in \mathbb{R} \backslash \{2\}$. Écrire les fractions suivantes sous la forme $a + \dfrac{b}{c}$ avec $b < c$.

a) $\dfrac{29}{6}$ ...... b) $\dfrac{k}{k-1}$ ... c) $\dfrac{3x-1}{x-2}$ ..

Calcul 1.9 — **Un produit de fractions.**

Soit $t \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$. On donne $A = \dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{1}{(1+t)^2}$ et $B = \big(1+t^2\big)(1+t)^2$.

Simplifier AB autant que possible. ....

Comparaison

Calcul 1.10 — **Règles de comparaison.**

Comparer les fractions suivantes avec le signe « > », « < » ou « = ».

a) $\dfrac{3}{5} \dots \dfrac{5}{9}$ .... b) $\dfrac{12}{11} \dots \dfrac{10}{12}$ ...... c) $\dfrac{125}{25} \dots \dfrac{105}{21}$ ....

Calcul 1.11 — **Produit en croix.**

Les nombres $A = \dfrac{33\ 215}{66\ 317}$ et $B = \dfrac{104\ 348}{208\ 341}$ sont-ils égaux ? Oui ou non ? ....

Calcul 1.12 — **Produit en croix.**

On pose $A = \dfrac{100\ 001}{1\ 000\ 001}$ et $B = \dfrac{1\ 000\ 001}{10\ 000\ 001}$: a-t-on $A > B$, $A = B$ ou $A < B$? ....

Réponses mélangées

$\dfrac{-1}{n(n+1)^2}$	$-\dfrac{ab}{a-b}$	2	3	$\dfrac{12}{11} > \dfrac{10}{12}$	$\dfrac{1}{2}$	247	$\dfrac{n^3+n}{n+1}$	$1\ 000$	$\dfrac{1}{9}$	
$2t$	$2\ 022$	$\dfrac{-10}{3}$	$\dfrac{4}{5}$	$3 + \dfrac{5}{x-2}$	$\dfrac{3}{2}n$	$\dfrac{203}{24}$	$\dfrac{7}{15}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{3}{5} > \dfrac{5}{9}$	9
$4 + \dfrac{5}{6}$	$A > B$	1	$\dfrac{16}{35}$	2^5	$-2 \times 3^{3k-2}$	Non	$1 + \dfrac{1}{k-1}$	$\dfrac{125}{25} = \dfrac{105}{21}$		

Fiche de calcul n° 2

Puissances

Prérequis

Opérations sur les puissances (produits, quotients), décompostion en facteurs premiers, sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

Calcul 2.1

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $10^5 \cdot 10^3$ ....

b) $(10^5)^3$ ....

c) $\dfrac{10^5}{10^3}$ ....

d) $\dfrac{10^{-5}}{10^{-3}}$ ....

e) $\dfrac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$ ....

f) $\dfrac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$ ....

Calcul 2.2

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs.

a) $3^4 \cdot 5^4$ ....

b) $(5^3)^{-2}$ ....

c) $\dfrac{2^5}{2^{-2}}$ ....

d) $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$ ....

e) $\dfrac{6^5}{2^5}$ ....

f) $\dfrac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$ ....

Calcul 2.3

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 3^p$, où n et p sont deux entiers relatifs.

a) $\dfrac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$ ....

b) $2^{21} + 2^{22}$ ....

c) $\dfrac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$ ....

d) $\dfrac{\left(3^2 \cdot (-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5 \cdot 2^3\right)^{-2}}$ ....

Calcul 2.4

Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a) $\dfrac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$ ....

b) $\dfrac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$ ....

c) $\dfrac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$ ....

d) $\dfrac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$ ....

Calcul 2.5

Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x.

a) $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1}$ ....

b) $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{x^2-4}$ ....

c) $\dfrac{x^2}{x^2-x} + \dfrac{x^3}{x^3+x^2} - \dfrac{2x^2}{x^3-x}$ ....

d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x}$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{x}{x+1}$ $\quad 15^4 \quad$ $\dfrac{2x}{x+1}$ $\quad 2^{21} \cdot 3 \quad 10^{15} \quad 11 \quad 5^{-6} \quad 2^{38} \cdot 3^{26}$

$10^2 \quad 10^8 \quad 10^{-2} \quad 2^{-4} \cdot 3^{-1} \quad 2^6 \cdot 5 \quad 3^5 \quad (-7)^{-2}$

$\dfrac{2}{x-2}$ $\quad 10^4 \quad 8 \quad 2^7 \quad 10^{-8} \quad 3^{10} \quad$ $\dfrac{1}{x-2}$ $\quad 3^{28} \quad 2$

Fiche de calcul n° 3

Calcul littéral

Prérequis
Les identités remarquables !

Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. Idéalement, on écrira directement le résultat. La variable x représente un nombre réel (ou complexe).

Calcul 3.1

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x.

a) $\left(2x - \dfrac{1}{2}\right)^3$ ....

b) $(x-1)^3\left(x^2+x+1\right)$ ....

c) $(x+1)^2(x-1)\left(x^2-x+1\right)$ ....

d) $(x+1)^2(x-1)\left(x^2+x+1\right)$ ....

e) $(x-1)^2(x+1)\left(x^2+x+1\right)$ ....

f) $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$ ....

Calcul 3.2

Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x.

a) $(x-2)^2\left(-x^2+3x-1\right)-(2x-1)(x^3+2)$ ....

b) $(2x+3)(5x-8)-(2x-4)(5x-1)$ ....

c) $\left((x+1)^2(x-1)\left(x^2-x+1\right)+1\right)x - x^6 - x^5 + 2$ ....

d) $(x+1)(x-1)^2 - 2\left(x^2+x+1\right)$ ....

e) $\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(1-\sqrt{2}x+x^2\right)$ ....

f) $\left(x^2+x+1\right)^2$ ....

Factoriser

Calcul 3.3 — Petite mise en jambe.

Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.

a) $-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49$ ....

b) $25-(10x+3)^2$ ....

c) $(6x-8)(4x-5)+36x^2-64$ ....

d) $(-9x-8)(8x+8)+64x^2-64$ ....

Calcul 3.4 — À l'aide de la forme canonique.

Factoriser les polynômes de degré deux suivants en utilisant leur forme canonique. On rappelle que la forme canonique de ax^2+bx+c est $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ (où $a\neq 0$).

a) x^2-2x+1 ....

b) x^2+4x+4 ....

c) x^2+3x+2 ....

d) $3x^2+7x+1$ ....

e) $2x^2+3x-28$ ....

f) $-5x^2+6x-1$ ....

Calcul 3.5 — Avec plusieurs variables.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) $(x+y)^2-z^2$ ....

b) $x^2+6xy+9y^2-169x^2$ ....

c) $xy+x+y+1$ ....

d) $xy-x-y+1$ ....

e) $x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y$ ..

f) $y^2\left(a^2+b^2\right)+16x^4\left(-a^2-b^2\right)$ ..

Calcul 3.6 — On passe au niveau supérieur.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) x^4-1 ....

b) $\left(-9x^2+24\right)\left(8x^2+8\right)+64x^4-64$ ....

c) x^4+x^2+1 ....

d) $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ ....

e) $(ap+bq+cr+ds)^2+(aq-bp-cs+dr)^2+(ar+bs-cp-dq)^2+(as-br+cq-dp)^2$.

Réponses mélangées

$1+2x+3x^2+2x^3+x^4$ $\quad$ $\left(a^2+b^2\right)\left(y-4x^2\right)\left(y+4x^2\right)$ $\quad$ $(x+1)(x+2)$

$2-x+x^3-x^4-x^5$ $\quad$ $x^5-x^3-x^2+1$ $\quad$ $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$

$2\left(x+\dfrac{3-\sqrt{233}}{4}\right)\left(x+\dfrac{3+\sqrt{233}}{4}\right)$ $\quad$ $2(3x-4)(10x+3)$ $\quad$ $1+x^4$ $\quad$ $(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$

$\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\left(p^2+q^2+r^2+s^2\right)$ $\quad$ $(x+y-z)(x+y+z)$ $\quad$ $4(5x+4)(-5x+1)$

$-1-3x-3x^2+x^3$ $\quad$ x^4+x^2+1 $\quad$ $(14x+3y)(-12x+3y)$ $\quad$ $(x+1)(y+1)$

$x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$ $\quad$ $(x-1)^2$ $\quad$ $(x+y)(x+1)^2$ $\quad$ $-6(6x+7)$

$8x^3-6x^2+\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{8}$ $\quad$ $-5(x-1)\left(x-\dfrac{1}{5}\right)$ $\quad$ $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)$ $\quad$ $(x-1)(y-1)$ $\quad$ $(x+2)^2$

$-2+12x-17x^2+8x^3-3x^4$ $\quad$ $x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1$ $\quad$ $x^5-x^3+x^2-1$ $\quad$ $-28+21x$

$-8\left(x^2+1\right)(x-4)(x+4)$ $\quad$ $3\left(x+\dfrac{7-\sqrt{37}}{6}\right)\left(x+\dfrac{7+\sqrt{37}}{6}\right)$ $\quad$ $-8(x+1)(x+16)$

Fiche de calcul n° 4

Racines carrées

Prérequis
Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

Premiers calculs

Calcul 4.1 — Définition de la racine carrée.

Exprimer sans racine carrée les expressions suivantes.

a) $\sqrt{(-5)^2}$ ....

b) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$ ....

c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ ....

d) $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$ ....

e) $\sqrt{(3-\pi)^2}$ ....

f) $\sqrt{(3-a)^2}$ ....

Calcul 4.2 — Transformation d'écriture.

Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

a) $(2\sqrt{5})^2$ ....

b) $(2+\sqrt{5})^2$ ....

c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ ....

d) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ ....

e) $(3+\sqrt{7})^2-(3-\sqrt{7})^2$ ....

f) $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$ ....

g) $\left(\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$ ....

h) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ .....

Avec la méthode de la quantité conjuguée

Calcul 4.3

Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes.

a) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$ ....

b) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ ....

c) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ....

d) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ....

e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ....

f) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ ....

g) $\dfrac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ....

h) $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$ ....

Calcul 4.4

Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ....

Calculs variés

Calcul 4.5 — **Avec une variable.**

On considère la fonction f qui à $x>1$ associe $f(x)=\sqrt{x-1}$. Pour tout $x>1$, calculer et simplifier les expressions suivantes.

a) $f(x)+\dfrac{1}{f(x)}$ ....

b) $\dfrac{f(x+2)-f(x)}{f(x+2)+f(x)}$ ....

c) $\sqrt{x+2f(x)}$ ....

d) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ ....

e) $f(x)+4f''(x)$ ....

f) $\dfrac{f(x)}{f''(x)}$ ....

Calcul 4.6 — **Mettre au carré.**

Élever les quantités suivantes au carré pour en donner une expression simplifiée.

a) $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$ ....

b) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ....

Calcul 4.7 — **Méli-mélo.**

Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

a) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ ....

b) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ....

c) $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$ ....

d) $3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln 3}$ ....

e) $2\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$ ....

f) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ ....

Calcul 4.8

Simplifier $A=\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}}-\sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}}$.

On commencera par exprimer A^3 en fonction de A. ....

Réponses mélangées

$12\sqrt{7}$ $\quad -4(x-1)^2$ $\quad -(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ $\quad 9-\dfrac{10}{3}\sqrt{2}$ $\quad 20$ $\quad -\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$

$\sqrt{2}$ $\quad 1+\sqrt{5}$ $\quad 2\sqrt{2}$ $\quad \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ $\quad |3-a|$ $\quad 50-25\sqrt{3}$ $\quad 1+\sqrt{x-1}$

$\sqrt{3}-1$ $\quad 3+\sqrt{2}$ $\quad 1+\sqrt{2}$ $\quad 2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\sqrt{6}$ $\quad 5$ $\quad \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-1}$

$\dfrac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}$ $\quad \sqrt{3}$ $\quad \sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2$ $\quad 1$ $\quad 2\sqrt{2}$ $\quad 9+4\sqrt{5}$

$\ln(1+\sqrt{2})$ $\quad 1+\sqrt{3}$ $\quad -\sqrt{3}+2$ $\quad \pi-3$ $\quad 12$ $\quad \sqrt{7}-2$ $\quad 3-2\sqrt{2}$

$1+\sqrt{2}$ $\quad -11+5\sqrt{5}$ $\quad x-\sqrt{x^2-1}$ $\quad 10$ $\quad \dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$ $\quad 1-\sqrt{10}+\sqrt{15}$

Fiche de calcul n° 5

Expressions algébriques

Prérequis
Identités remarquables.

Équations polynomiales

Calcul 5.1 — Cubique.

Soit a un nombre réel tel que $a^3 - a^2 + 1 = 0$.
Exprimer les quantités suivantes sous la forme $xa^2 + ya + z$ où x, y, z sont trois nombres rationnels.

a) $(a+2)^3$ ....

b) $a^5 - a^6$ ....

c) a^{12} ....

d) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2}$ ....

Calcul 5.2 — Introduction aux nombres complexes.

Soit i un nombre tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
Exprimer les quantités suivantes sous la forme $x + \mathrm{i}y$ où x, y sont deux réels.

a) $(3+\mathrm{i})^2$ ....

b) $(3-\mathrm{i})^2$ ....

c) $(3-\mathrm{i})^3$ ....

d) $(3-2\mathrm{i})^3$ ....

Calcul 5.3

Même exercice.

a) $(4-5\mathrm{i})(6+3\mathrm{i})$ ....

b) $(2+3\mathrm{i})^3(2-3\mathrm{i})^3$ .....

c) $\left(-4+\mathrm{i}\sqrt{5}\right)^3$ ....

d) $\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ ....

Calcul 5.4 — Puissance cinquième.

Soit a un nombre distinct de 1 tel que $a^5 = 1$. Calculer les nombres suivants :

a) $a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^2 + 3a - 1$ ....

b) $a^{1234} \times a^{2341} \times a^{3412} \times a^{4123}$ ....

c) $\displaystyle\prod_{k=0}^{1234} a^k$ ....

d) $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$ ....

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{99} a^k$ ....

f) $\displaystyle\prod_{k=0}^{4} \left(2 - a^k\right)$ ....

Expressions symétriques

Calcul 5.5 — Inverse.

Soit x un réel non nul. On pose $a = x - \dfrac{1}{x}$. Exprimer les quantités suivantes en fonction de a uniquement.

a) $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ ....

b) $x^3 - \dfrac{1}{x^3}$ ....

c) $x^4 + \dfrac{1}{x^4}$ ....

Calcul 5.6 — Trois variables.

Soient x, y, z trois nombres deux à deux distincts. On pose

$$a = x + y + z, \qquad b = xy + yz + zx \qquad \text{et} \qquad c = xyz.$$

Exprimer les quantités suivantes en fonction de a, b, c uniquement.

a) $x^2 + y^2 + z^2$ ....

b) $x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y)$ ....

c) $x^3 + y^3 + z^3$ ....

d) $(x+y)(y+z)(z+x)$ ....

e) $x^2yz + y^2zx + z^2xy$ ....

f) $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$ ....

Calcul 5.7

Même exercice.

a) $x^3(y+z) + y^3(z+x) + z^3(x+y)$ ....

b) $x^4 + y^4 + z^4$ ....

c) $\dfrac{x}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{z}{(z-x)(z-y)}$ ....

d) $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y^2}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ ....

e) $\dfrac{x^3}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y^3}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{z^3}{(z-x)(z-y)}$ ....

Réponses mélangées

$-4 + 43\mathrm{i}\sqrt{5}$ $\quad a^4 + 4a^2 + 2$ $\quad ab - c$ $\quad -1$ $\quad -9 - 46\mathrm{i}$ $\quad a^3 + 3a$ $\quad 7a^2 + 12a + 7$

$39 - 18\mathrm{i}$ $\quad 18 - 26\mathrm{i}$ $\quad 8 - 6\mathrm{i}$ $\quad a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2$ $\quad a^2 + 2$ $\quad 3$ $\quad 1$

$8 + 6\mathrm{i}$ $\quad ac$ $\quad 1$ $\quad 0$ $\quad 31$ $\quad a$ $\quad a^2 - a - 1$ $\quad 1$ $\quad 2197$ $\quad a^2b - ac - 2b^2$

$-a^2 + 1$ $\quad -2ac + b^2$ $\quad ab - 3c$ $\quad 0$ $\quad a^2 - 2b$ $\quad 4a^2 - a - 3$ $\quad 1$ $\quad a^3 - 3ab + 3c$

Fiche de calcul n° 6

Équations du second degré

Prérequis
Relations entre coefficients et racines.

Dans cette fiche :

- tous les trinômes considérés sont réels ;
- on ne s'intéresse qu'à leurs éventuelles **racines réelles** ;
- tous les paramètres sont choisis de telle sorte que l'équation considérée soit bien de degré 2.

Les formules donnant explicitement les racines d'une équation du second degré en fonction du discriminant **ne servent nulle part** dans cette fiche d'exercices !

Recherche de racines

Calcul 6.1 — Des racines vraiment évidentes.

Résoudre mentalement les équations suivantes. *Les racines évidentes sont à chercher parmi* $0, 1, -1, 2, -2$ *ainsi éventuellement que* 3 *et* -3.

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$ ....

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ ....

c) $x^2 + 4x - 12 = 0$ ....

d) $x^2 - 5x + 6 = 0$ ....

e) $x^2 - 5x = 0$ ....

f) $2x^2 + 3x = 0$ ....

g) $2x^2 + 3 = 0$ ....

h) $x^2 + 4x - 5 = 0$ ....

i) $3x^2 - 11x + 8 = 0$ ....

j) $5x^2 + 24x + 19 = 0$ ....

Calcul 6.2 — Somme et produit.

Résoudre mentalement les équations suivantes.

a) $x^2 - 13x + 42 = 0$ ....

b) $x^2 + 8x + 15 = 0$ ....

c) $x^2 + 18x + 77 = 0$ ....

d) $x^2 - 8x - 33 = 0$ ....

e) $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ ....

f) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ ....

Calcul 6.3 — L'une grâce à l'autre.

Calculer la seconde racine des équations suivantes.

a) $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ est racine ....

b) $7x^2 + 23x + 6 = 0$ sachant que $x = -3$ est racine ....

c) $mx^2 + (2m+1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ est racine ....

d) $(m+3)x^2 - (m^2 + 5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ est racine ....

Calcul 6.4 — Racine évidente.

Trouver une racine des équations suivantes et calculer l'autre en utilisant les relations entre les coefficients du trinôme et ses racines.

Seuls les deux derniers calculs ne se font pas de tête.

a) $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ ....

b) $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0$ ....

c) $(x+a)(x+b)=(m+a)(m+b)$ ....

d) $(b-c)x^2+(c-a)mx+(a-b)m^2=0$ ....

e) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{b}{x}=\dfrac{m}{a}+\dfrac{b}{m}$ ....

f) $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ ....

Recherche d'équations

Calcul 6.5 — À la recherche de l'équation.

En utilisant la somme et le produit des racines d'une équation du second degré, former l'équation du second degré admettant comme racines les nombres suivants.

a) 9 et 13 ....

b) -11 et 17 ....

c) $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$ ....

d) $m+\sqrt{m^2-3}$ et $m-\sqrt{m^2-3}$ ....

e) $m+3$ et $\dfrac{2m-5}{2}$ ....

f) $\dfrac{m+1}{m}$ et $\dfrac{m-2}{m}$ ....

Calcul 6.6 — Avec le discriminant.

Déterminer la valeur à donner à m pour que les équations suivantes admettent une racine double, et préciser la valeur de la racine dans ce cas.

a) $x^2-(2m+3)x+m^2=0$ ....

b) $(m+2)x^2-2(m-1)x+4=0$ ....

c) $(m+3)x^2+2(3m+1)x+(m+3)=0$ ....

Factorisations et signe

Calcul 6.7 — Factorisation à vue.

Déterminer de tête les valeurs des paramètres a et b pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout x.

a) $2x^2 + 7x + 6 = (x+2)(ax+b)$ ....

b) $-4x^2 + 4x - 1 = (2x-1)(ax+b)$ ....

c) $-3x^2 + 14x - 15 = (x-3)(ax+b)$ ....

d) $\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{11}{2}x - 40 = (x-5)(ax+b)$ ....

e) $x^2 + 2\sqrt{7}x - 21 = (x-\sqrt{7})(ax+b)$ ....

Calcul 6.8 — Signe d'un trinôme.

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les expressions suivantes sont positives ou nulles.

a) $x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}$ ....

b) $-x^2 + 2x + 15$ ....

c) $(x+1)(3x-2)$ ....

d) $\dfrac{x-4}{2x+1}$ ....

Réponses mélangées

$2/3$ $\quad$ m donc ab/m $\quad$ m donc $-(m+a+b)$ $\quad$ $a=-3$ et $b=5$ $\quad$ $-7, -11$

$x^2 - 22x + 117 = 0$ $\quad$ $]-\infty, -1] \cup [2/3, +\infty[$ $\quad$ 0, donc 5 $\quad$ $m=1$ et $x=-1$ ou $m=-1$ et $x=1$

$[-3, 5]$ $\quad$ m donc $m(a-b)/(b-c)$ $\quad$ $a=1/2$ et $b=8$ $\quad$ $-3, 11$ $\quad$ 1 donc $c(a-b)/(a(b-c))$

a, b $\quad$ $]-\infty, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$ $\quad$ $-1/m$ $\quad$ $a+b$ puis $2ab/(a+b)$. $\quad$ 1 donc -5

$6, 7$ $\quad$ 1 donc $(a-b)/(b-c)$ $\quad$ $]-\infty, -1/2[\cup [4, +\infty[$ $\quad$ $2m/(m+3)$

$-2/7$ $\quad$ $a=1$ et $b=3\sqrt{7}$ $\quad$ $m^2x^2 + (m-2m^2)x + (m^2-m-2) = 0$

$a=-2$ et $b=1$ $\quad$ $2, 3$ $\quad$ $a-b, a+b$ $\quad$ $3, 3$ $\quad$ $a=2$ et $b=3$ $\quad$ 1 donc $8/3$

$\varnothing$ $\quad$ $m=-3/4$ et $x=3/4$ $\quad$ $-3, -5$ $\quad$ $2x^2 - (4m+1)x + (2m^2+m-15) = 0$

-1 donc $-19/5$ $\quad$ $x^2 - 4x + 1 = 0$ $\quad$ $-1/3, -1/3$ $\quad$ $x^2 - 2mx + 3 = 0$

0, donc $-3/2$ $\quad$ $x^2 - 6x - 187 = 0$ $\quad$ $2, -6$ $\quad$ $m=-1$ et $x=-2$, ou $m=7$ et $x=2/3$

Fiche de calcul n° 7

Exponentielle et Logarithme

Prérequis
Exponentielle, logarithme.

Logarithmes

Calcul 7.1

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln 16$ ....

b) $\ln 512$ ....

c) $\ln(0,125)$ ....

d) $\dfrac{1}{8}\ln\left(\dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1}{8}\right)$ ....

e) $\ln(72) - 2\ln 3$ ....

f) $\ln 36$ ....

Calcul 7.2

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln\left(\dfrac{1}{12}\right)$ ....

b) $\ln(2{,}25)$ ....

c) $\ln(21) + 2\ln(14) - 3\ln(0{,}875)$ ..

d) $\ln 500$ ....

e) $\ln\left(\dfrac{16}{25}\right)$ ....

f) $\ln(6{,}25)$ ....

Calcul 7.3

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

$\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\dfrac{98}{99}\right) + \ln\left(\dfrac{99}{100}\right)$ ....

Calcul 7.4 — Logarithme et radicaux.

a) On pose $\alpha = \dfrac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1)$. Calculer $(1+\sqrt{2})^2$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$.

En déduire une écriture simplifiée de α en fonction de $\ln(\sqrt{2}-1)$..............................

b) Calculer β sachant que $\ln\beta = \ln(7+5\sqrt{2}) + 8\ln(\sqrt{2}+1) + 7\ln(\sqrt{2}-1)$ ....

c) Simplifier $\gamma = \ln\left((2+\sqrt{3})^{20}\right) + \ln\left((2-\sqrt{3})^{20}\right)$ ....

d) Simplifier $\delta = \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$. ....

Exponentielles

Calcul 7.5

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $\mathrm{e}^{3\ln(2)}$ ....

b) $\ln(\sqrt{e})$ ....

c) $\ln(\mathrm{e}^{\frac{1}{3}})$ ....

d) $\mathrm{e}^{-2\ln(3)}$ ....

e) $\ln(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})$ ....

f) $\mathrm{e}^{\ln(3)-\ln(2)}$ ....

Calcul 7.6

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $-\mathrm{e}^{-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$ ....

b) $\mathrm{e}^{-\ln(\ln(2))}$ ....

c) $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{17}}\right)$ ....

d) $\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}^4}\right) - \ln\left(\sqrt{\mathrm{e}^2}\right)$ ....

e) $\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln \mathrm{e}^2)}\right)$ ....

f) $\exp\left(-\dfrac{1}{3}\ln(\mathrm{e}^{-3})\right)$ ....

Études de fonctions

Calcul 7.7 — Parité.

Étudier la parité des fonctions suivantes.

a) $f_1 : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{2021+x}{2021-x}\right)$ ....

b) $f_2 : x \longmapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ ....

c) $f_3 : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$ ....

d) $f_4 : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}$ ....

Calcul 7.8 — Étude d'une fonction.

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}$.

a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction. ....

b) Montrer que pour tous réels a et b on a $f(a+b) = \dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$. ....

c) Déterminer la limite de f en $+\infty$. ....

d) Déterminer la limite de f en $-\infty$. ....

Calcul 7.9

On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(1+x) \end{cases}$$

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout x réel pour lequel elles sont définies.

a) $f(2\mathrm{e}^x - 1)$ ....

b) $\mathrm{e}^{x-\frac{1}{2}f(x)}$ ....

c) $\dfrac{1}{2}f(x^2-2x)$ ....

d) $xf'(x) - 1$ ....

e) $\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$ ....

Équations, inéquations

Calcul 7.10

Résoudre les équations ou inéquations suivantes.

a) $\mathrm{e}^{3x-5} \geqslant 12$ ....

b) $1 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2+x}$ ....

c) $\mathrm{e}^{1+\ln(x)} \geqslant 2$ ....

d) $\mathrm{e}^{-6x} \leqslant \sqrt{\mathrm{e}}$ ....

e) $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$ ....

f) $\ln(-x-5) = \ln\left(\dfrac{x-61}{x+7}\right)$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+x}}$ $\quad \dfrac{1}{2}\ln(2)$ $\quad -1$ $\quad -3\ln(2)$ $\quad 8$ $\quad 2\ln(5)-2\ln(2)$ $\quad x \geqslant \dfrac{\ln(12)+5}{3}$

$3\ln(5)+2\ln(2)$ $\quad 2\ln(3)-2\ln(2)$ $\quad$ impaire $\quad x \geqslant \dfrac{2}{e}$ $\quad -2\ln(5)+4\ln(2)$ $\quad \mathbb{R}$ $\quad \dfrac{3}{2}$

$\ln(3)+11\ln(2)$ $\quad 1$ $\quad x+\ln(2)$ $\quad \dfrac{-13-\sqrt{273}}{2}$ $\quad$ impaire $\quad$ -1 $\quad 0$ $\quad x \geqslant -\dfrac{1}{12}$

$9\ln(2)$ $\quad \dfrac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)$ $\quad \dfrac{1}{2}$ $\quad -\dfrac{1}{1+x}$ $\quad 3\ln(2)$ $\quad -17$ $\quad \mathrm{e}^{x\ln(1+x)}$ $\quad 2\ln(2)+2\ln(3)$

$\dfrac{1}{9}$ $\quad -2$ $\quad -\ln(3)-2\ln(2)$ $\quad 4\ln 2$ $\quad x \in [0,1]$ $\quad$ impaire $\quad$ impaire $\quad e$ $\quad \varnothing$

$\ln(|x-1|)$ $\quad \dfrac{1}{3}$ $\quad \dfrac{1}{\ln(2)}$ $\quad 0$ $\quad$ ok $\quad 17+12\sqrt{2}$ $\quad -\dfrac{1}{2}$ $\quad -2\ln(2)-2\ln(5)$ $\quad 1$

Fiche de calcul n° 8

Trigonométrie

Prérequis
Relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Symétrie et périodicité de sin et cos.
Formules d'addition et de duplication. Fonction tangente.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Valeurs remarquables de cosinus et sinus

Calcul 8.1

Simplifier :

a) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ ..

b) $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ ....

c) $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

d) $\cos^2\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ ....

Propriétés remarquables de cosinus et sinus

Calcul 8.2

Simplifier :

a) $\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ ....

b) $\sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ ....

d) $\cos(x - \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$ ....

Formules d'addition

Calcul 8.3

Calculer les quantités suivantes.

a) $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ $\left(\textit{Indice :} \ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}\right)$.

b) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ....

c) $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ....

d) $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ....

Calcul 8.4

a) Simplifier : $\sin(4x)\cos(5x) - \sin(5x)\cos(4x)$ ....

b) Simplifier : $\dfrac{\sin(2x)}{\sin(x)} - \dfrac{\cos(2x)}{\cos(x)}$ $\left(\text{pour} x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$ ....

c) Simplifier : $\cos(x) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$ ....

d) Expliciter $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ ....

Formules de duplication

Calcul 8.5

En remarquant que $\dfrac{\pi}{4} = 2 \times \dfrac{\pi}{8}$, calculer :

a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ ....

b) $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ ....

Calcul 8.6

a) Simplifier : $\dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}$ $\left(\text{avec } x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\right)$ ....

b) Simplifier : $\dfrac{\sin(3x)}{\sin(x)} - \dfrac{\cos(3x)}{\cos(x)}$ $\left(\text{pour } x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\right)$ ....

c) Expliciter $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ ....

Équations trigonométriques

Calcul 8.7

Résoudre dans $[0, 2\pi]$, dans $[-\pi, \pi]$, puis dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ ....

b) $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ .....

c) $\sin(x) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

d) $\tan(x) = -1$ ....

e) $\cos^2(x) = \dfrac{1}{2}$ ....

f) $|\tan(x)| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ .....

g) $\cos(2x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ......

h) $2\sin^2(x) + \sin(x) = 1$

i) $\cos(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$ ...

j) $\sin(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$ ...

Inéquations trigonométriques

Calcul 8.8

Résoudre dans $[0, 2\pi]$, puis dans $[-\pi, \pi]$, les inéquations suivantes :

a) $\cos(x) \geqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ....

b) $\cos(x) \leqslant \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ .....

c) $\sin(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ ....

d) $|\sin(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$ ....

e) $\tan(x) \geqslant 1$ ....

f) $|\tan(x)| \geqslant 1$ ....

g) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$ ......

h) $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$ .....

Réponses mélangées

$\left[-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ $\left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ $\left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$ $-\sqrt{3}$ $2\cos(x)$ $\frac{1}{\cos(x)}$ $\left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

$\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$ $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$

$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ 0 $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

$\left\{\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\left\{\frac{5\pi}{14} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{9\pi}{14} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$-\sin(x)$ $\left[0, \frac{3\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{15\pi}{8}, 2\pi\right]$ $\left[-\pi, -\frac{5\pi}{8}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \pi\right]$

$\left\{\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\right\}$ $-\sin(x)$ $\left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right\}$ $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ $\left\{\frac{5\pi}{14}, \frac{9\pi}{14}\right\}$

$\left\{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ $\left\{\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$

$8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$ $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ $4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

$\left\{-\frac{11\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right\}$ $\left\{\frac{-2\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}\right\}$ $-2\cos(x)$ $\left\{\frac{5\pi}{14}, \frac{9\pi}{14}\right\}$ $\left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

$\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$ $\left\{-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}$ $\left\{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\left\{\frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$ 2 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$

$\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$ $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ 0 $\left\{\frac{\pi}{7}, \frac{13\pi}{7}\right\}$ $\left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $-\frac{1}{2}$

$\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ $\left\{\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$ $\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$ $\tan(x)$

$\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$ $\left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ $\left\{-\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}\right\}$ $\left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $-\frac{1}{2}$ 0 $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$

Fiche de calcul n° 9

Dérivation

Prérequis
Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.

Application des formules usuelles

Calcul 9.1 — Avec des produits.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 2x + 6)\exp(2x)$. ....

d) $x \in]2, +\infty[$ et $f(x) = (3x^2 - x)\ln(x - 2)$ ....

Calcul 9.2 — Avec des puissances.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 5x)^5$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (\sin(x) + 2\cos(x))^2$. ....

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (3\cos(x) - \sin(x))^3$. ....

Calcul 9.3 — Avec des fonctions composées.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. ....

b) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(\ln(x))$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2 - x)\exp(x^2 + x)$. ....

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \exp(3\sin(2x))$. ....

Calcul 9.4 — **Avec des fonctions composées** — ***bis.***

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sin\left(\dfrac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos\left(\dfrac{2x + 1}{x^2 + 4}\right)$. ....

c) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$. ....

d) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \sin\big(\sqrt{x}\big)$. ....

Calcul 9.5 — **Avec des quotients.**

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{2\sin(x) + 3}$. ....

b) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3x + 2}$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{\cos(2x + 1)}{x^2 + 1}$. ....

d) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x}{\ln(x)}$. ....

Opérations et fonctions composées

Calcul 9.6

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. ....

b) $x \in]-3, 3[$ et $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$. ....

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 1}}\right)$ ....

d) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$. ....

Dériver pour étudier une fonction

Calcul 9.7

Calculer $f'(x)$ et écrire le résultat sous forme factorisée.

a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -2\}$ et $f(x) = \dfrac{1}{3-x} + \dfrac{1}{2+x}$. ....

b) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$ ....

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(x^2 + x - 2) - \dfrac{x+2}{x-1}$. ....

d) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)$. ....

e) $x \in]0, e[\cup]e, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)}$. ....

Réponses mélangées

$\dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$ $\quad \dfrac{1}{x\ln(x)}$ $\quad \dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}$ $\quad \dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}$

$(6x-1)\ln(x-2) + \dfrac{3x^2-x}{x-2}$ $\quad \dfrac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$ $\quad \dfrac{2x^2+2x-8}{(x^2+4)^2}\sin\dfrac{2x+1}{x^2+4}$ $\quad \dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$

$\dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x\sin(x)}$ $\quad -3(3\cos(x)-\sin(x))^2(3\sin(x)+\cos(x))$ $\quad 5x^4-6x^2+4x-15$

$6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))$ $\quad \dfrac{(2x+3)(2\sin(x)+3)-(x^2+3x)\times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}$ $\quad 5(x^2-5x)^4(2x-5)$

$-2\dfrac{(x^2+1)\sin(2x+1)+x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}$ $\quad \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ $\quad \dfrac{6x}{(x^2+1)^2}\cos\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)$ $\quad \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$

$\dfrac{(4x+3)\ln(x)-2x-3}{(\ln(x))^2}$ $\quad \dfrac{2}{x+1}\left(x+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad \dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}$

$2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $\quad 6x^2+2x-11$ $\quad (2x^2-2x+10)\exp(2x)$ $\quad 8\cos^2(x)-6\cos(x)\sin(x)-4$

$4(2x^3+4x-1)(3x^2+2)$ $\quad \dfrac{2x}{x^2+1}$ $\quad (-2x^2+3x-1)\exp(x^2+x)$ $\quad \dfrac{1}{1-x^2}$

Fiche de calcul n° 10

Nombres complexes

Prérequis
Forme algébrique et forme exponentielle.

Pour s'échauffer

Calcul 10.1 — Écriture algébrique.

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

a) $(2+6\mathrm{i})(5+\mathrm{i})$ ....

b) $(3-\mathrm{i})(4+\mathrm{i})$ ....

c) $(4-3\mathrm{i})^2$ ....

d) $(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})$ ....

e) $(2-3\mathrm{i})^4$ ....

f) $\dfrac{1}{3-\mathrm{i}}$ ....

g) $\dfrac{2-3\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}}$ ....

h) $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ ....

Calcul 10.2 — Forme exponentielle.

Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle.

a) $\sqrt{3}\mathrm{i}$ ....

b) $-2\mathrm{i}$ ....

c) $-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}}$ ....

d) $5-5\mathrm{i}$ ....

e) $-5+5\mathrm{i}\sqrt{3}$ ....

f) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ ....

Un calcul plus dur

Calcul 10.3 — Une simplification.

On pose $z=\dfrac{1+\sqrt{2}+\mathrm{i}}{1+\sqrt{2}-\mathrm{i}}$.

a) Calculer $|z|$ ....

b) Mettre z sous forme algébrique ....

c) Calculer z^{2021} ....

Réponses mélangées

$5 \qquad -119+120\mathrm{i} \qquad 13-\mathrm{i} \qquad 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \qquad -\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}} \qquad 2e^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}$

$\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \qquad \dfrac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}} \qquad \dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}\mathrm{i} \qquad \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \qquad 1 \qquad 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

$\dfrac{4}{29}-\dfrac{19}{29}\mathrm{i} \qquad 10\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}} \qquad 5\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} \qquad 4+32\mathrm{i} \qquad 7-24\mathrm{i}$

Fiche de calcul n° 11

Trigonométrie et nombres complexes

Prérequis
Nombres complexes, trigonométrie.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Linéarisation

Calcul 11.1

Linéariser :

a) $\cos^3(x)$ ....

b) $\cos(2x)\sin^2(x)$ ....

c) $\cos^2(2x)\sin^2(x)$ ...

d) $\cos(3x)\sin^3(2x)$ ...

e) $\cos^3(2x)\cos(3x)$ ..

f) $\sin^2(4x)\sin(3x)$ ...

Arc moitié, arc moyen

Calcul 11.2

Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$) :

a) $1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$ ....

b) $1 + e^{i\frac{7\pi}{6}}$ ....

c) $e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1$ ....

d) $1 + ie^{i\frac{\pi}{3}}$ ....

e) $-1 - e^{i\frac{\pi}{6}}$ ....

f) $1 - e^{i\frac{\pi}{12}}$ ....

g) $\dfrac{1 + e^{i\frac{\pi}{6}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{12}}}$ ....

h) $\left(1 + e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{27}$ ....

Calcul 11.3

Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$) :

a) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{2}}$ ....

b) $e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{2}}$ ....

Délinéarisation

Calcul 11.4

Exprimer en fonction des puissances de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$:

a) $\cos(3x)$ ....

b) $\sin(4x)$ ....

Factorisation

Calcul 11.5

Factoriser :

a) $\cos(x)+\cos(3x)$ .....

b) $\sin(5x)-\sin(3x)$ .....

c) $\cos(x)-\cos(3x)$ .....

d) $\sin(3x)+\sin(5x)$ .....

Calcul 11.6

Factoriser :

a) $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)$ .....

b) $\cos(x)+\cos(3x)+\cos(5x)+\cos(7x)$ .....

c) $\cos(x)+\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\dfrac{4\pi}{3}\right)$ .....

Intégrales

Calcul 11.7

Calculer :

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ .....

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\cos(x)\,\mathrm{d}x$ .....

Réponses mélangées

$\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)}\mathrm{e}^{\frac{13\mathrm{i}\pi}{24}}$ $\qquad$ $\dfrac{\sin(8x)}{2\sin(x)}$ $\qquad$ $2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\frac{-7\mathrm{i}\pi}{12}}$ $\qquad$ $2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$

$-\dfrac{\sin(9x)}{8}+\dfrac{3\sin(5x)}{8}-\dfrac{\sin(3x)}{8}-\dfrac{3\sin(x)}{8}$ $\qquad$ $4\cos^3(x)\sin(x)-4\cos(x)\sin^3(x)$

$2\sin(x)\sin(2x)$ $\qquad$ $2\sin\left(\dfrac{\pi}{24}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{24}}$ $\qquad$ $-\dfrac{1}{4}\sin(11x)+\dfrac{1}{4}\sin(5x)+\dfrac{1}{2}\sin(3x)$

$2\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $-\dfrac{1}{4}\cos(4x)+\dfrac{1}{2}\cos(2x)-\dfrac{1}{4}$ $\qquad$ $2\cos(4x)\sin(x)$

$2^{27}\cos^{27}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ $\qquad$ $\dfrac{\cos(9x)}{8}+\dfrac{3\cos(5x)}{8}+\dfrac{\cos(3x)}{8}+\dfrac{3\cos(x)}{8}$ $\qquad$ $2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$

$\dfrac{1}{5}(\mathrm{e}^{\pi}-2)$ $\qquad$ $\dfrac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2}$ $\qquad$ $2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$ $\qquad$ $4\cos^3(x)-3\cos(x)$

$\dfrac{1}{4}\cos(3x)+\dfrac{3}{4}\cos(x)$ $\qquad$ $2\cos(2x)\cos(x)$ $\qquad$ $-\dfrac{1}{8}\cos(6x)+\dfrac{1}{4}\cos(4x)-\dfrac{3}{8}\cos(2x)+\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ $\qquad$ $2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ $\qquad$ $\left(-2\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$ $\qquad$ $2\sin(4x)\cos(x)$

Fiche de calcul n° 12

Sommes et produits

Prérequis
Factorielle. Identités remarquables. Décomposition en éléments simples.
Fonctions usuelles (racine carrée, logarithme népérien).

Si q est un nombre réel et si $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $m \leqslant n$, on a

- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} k = \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k = \begin{cases} q^m \dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.

Calculs de sommes simples

Calcul 12.1

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} n$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} 7k$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3k+n-1)$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{k-4}{3}\right)$ ....

Calcul 12.2

Même exercice.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \big(4k(k^2+2)\big)$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} 3^k$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k}$ ....

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (7^k + 4k - n + 2)$ ....

f) $\displaystyle\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$ ....

Calcul 12.3 — Produits.

Calculer les produits suivants, où p et q sont des entiers naturels non nuls tel que $p \geqslant q$.

a) $\displaystyle\prod_{k=p}^{q} 2$ ....

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^k$ ....

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 5\sqrt{k} \times k$ ....

d) $\displaystyle\prod_{k=-10}^{10} k$ ....

Changements d'indice

Calcul 12.4

Calculer les sommes suivantes en effectuant le changement d'indice demandé.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n+1-k$ avec $j = n+1-k$. ....

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}$ avec $j = n+1-k$. ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$ avec $j = k-1$. ....

d) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2} (k-2)^3$ avec $j = k-2$. ....

Sommes télescopiques, produits télescopiques

Calcul 12.5 — Sommes télescopiques.

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} (k+1)^3 - k^3$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$ ....

Calcul 12.6 — Produits télescopiques.

Calculer les produits suivants.

a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$ ....

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-1}$ ....

c) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right)$ ....

d) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ ....

Décomposition en éléments simples

Calcul 12.7

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$ ....

Sommation par paquets

Calcul 12.8

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k^2$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\min(k,n)$ ....

Sommes doubles

Calcul 12.9

Calculer les sommes doubles suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j$ ....

b) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (i+j)$ ....

d) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (i+j)^2$ ....

e) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \ln(i^j)$ ....

f) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{7(n+1)(n+4)}{2}$ $\qquad \dfrac{n+1}{2n}$ $\qquad (n+2)^3-2^3$ $\qquad \dfrac{7}{6}(7^n-1)+n(n+4)$ $\qquad \ln(n+1)$

2^{q-p+1} $\qquad \dfrac{9}{2}(3^{n-2}-1)$ $\qquad 1-4n^2$ $\qquad \dfrac{n+1}{2n}$ $\qquad n(n+2)$ $\qquad n2^{n+1}+2(1-2^n)$

$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+3}$ $\qquad \dfrac{n(n+1)}{2}$ $\qquad \dfrac{n^2(n+1)}{2}$ $\qquad \dfrac{n(n+1)}{2}$ $\qquad \ln(n!)$ $\qquad 5^{n+1}\dfrac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3}$ $\qquad \dfrac{n(n^2-1)}{2}$

$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ $\qquad 2n^2+n$ $\qquad \dfrac{n(3n+1)}{2}$ $\qquad \dfrac{(n-2)(n-7)}{6}$ $\qquad 0$ $\qquad \dfrac{n(5n+1)}{2}$

$\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{6}$ $\qquad 5^n(n!)^{\frac{3}{2}}$ $\qquad 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$ $\qquad \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ $\qquad \dfrac{1}{n}$ $\qquad n+1$ $\qquad 1-\dfrac{1}{n+1}$

$n(n+1)(n^2+n+4)$ $\qquad 0$ $\qquad \dfrac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}$ $\qquad (n+1)!-1$ $\qquad \dfrac{n(n+3)}{4}$ $\qquad 1-\dfrac{1}{(n+1)!}$

Fiche de calcul n° 13

Coefficients binomiaux

Prérequis

Factorielles. Coefficients binomiaux. Formule du binôme de Newton.

La lettre n désigne un entier naturel non nul.

Manipulations de factorielles et coefficients binomiaux

Calcul 13.1 — Pour s'échauffer.

Donner la valeur des expressions suivantes :

a) $\dfrac{101!}{99!}$ ....

b) $\dfrac{10!}{7!}$ ....

c) $\dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!}$ ....

d) $\dbinom{6}{2}$ ....

e) $\dbinom{8}{3}$ ....

f) $4 \times \dbinom{7}{4}$ ....

Calcul 13.2 — Pour s'échauffer – bis.

Écrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles, coefficients binomiaux et le cas échéant à l'aide de puissances.

a) $6 \times 7 \times 8 \times 9$ ....

b) $\dfrac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4}$ ....

c) $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$ ......

d) $3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)$ ...

Calcul 13.3 — Avec des paramètres.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre k désigne un entier naturel tel que $k < n$.

a) $\dbinom{n}{2}$ (pour $n \geqslant 2$) ....

b) $\dbinom{n}{3}$ (pour $n \geqslant 3$) ....

c) $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$ ....

d) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$ ....

e) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{n}{(n+1)!}$ ....

f) $\dfrac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \dfrac{n!}{2^{2n}}$ ....

Calcul 13.4 — Avec des paramètres - bis.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre a désigne un nombre non nul.

a) $\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{2n \times (n+1)!} + \dfrac{1}{2 \times (n+2)!}$ ....

b) $\dfrac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \dfrac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3}$ ....

Autour du binôme de Newton

Calcul 13.5 — Le binôme de Newton.

Calculer les sommes ci-dessous à l'aide de la formule du binôme de Newton.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2n-k} \binom{n}{k}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1}$

Calcul 13.6

a) Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton $(1+1)^n + (1-1)^n$ ....

b) Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}$ ....

Calcul 13.7

En utilisant la fonction $x \longmapsto (1+x)^n$, ses dérivées d'ordre 1 et 2 et sa primitive s'annulant en 0, calculer

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}$ ....

Calcul 13.8

a) Donner le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)^{2n}$ ....

b) Donner-en une autre expression en développant le produit $(1+x)^n(1+x)^n$ ....

c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ ....

Réponses mélangées

720 $\quad \dfrac{n(n-1)}{2}$ $\quad \dfrac{1}{(n+1)!}$ $\quad 6^n$ $\quad \dfrac{k+1}{n-k}$ $\quad 2^n$ $\quad 56$ $\quad \dbinom{9}{4}$ $\quad n(n+1)2^{n-2}$

$\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$ $\quad \dfrac{1}{30}$ $\quad \dbinom{2n}{n}$ $\quad 140$ $\quad \dfrac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2}$ $\quad 10\,100$ $\quad 3^n$ $\quad \dfrac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}$

$2^n \times n!$ $\quad \dfrac{(2n+1)!}{2^n \times n!}$ $\quad (n+2)(n+1)$ $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ $\quad 12 \times 15^n$ $\quad n2^{n-1}$

$\dfrac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}$ $\quad 2 \times \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}$ $\quad 0$ $\quad 2^{n-1}$ $\quad \dbinom{2n}{n}$ $\quad \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ $\quad 15$ $\quad \dfrac{9!}{5!}$

Fiche de calcul n° 14

Manipulation des fonctions usuelles

Prérequis
Dérivation, équations du second degré.

Calculs de valeurs

Calcul 14.1 — Fonctions circulaires réciproques.

Calculer les valeurs suivantes.

a) $\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ....

b) $\dfrac{\operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\operatorname{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$ ....

c) $\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ....

d) $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ....

e) $\operatorname{Arctan}(1)$ ....

f) $\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\right)$ ....

Calcul 14.2 — Valeurs de fonctions hyperboliques.

Calculer les valeurs suivantes. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\operatorname{th}(x) = \operatorname{sh}(x)/\operatorname{ch}(x)$.

a) $\operatorname{ch}(0)$ ....

b) $\operatorname{sh}(0)$ ....

c) $\operatorname{ch}(\ln(2))$ ....

d) $\operatorname{sh}(\ln(3))$ ....

e) $\operatorname{ch}(\ln(2/3))$ ....

f) $\operatorname{th}(\ln(2))$ ....

Calcul 14.3 — Identités de trigonométrie hyperbolique.

Soient x et y des réels.
Calculer en développant soigneusement, et en simplifiant au maximum, les expressions suivantes.

a) $\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y) + \operatorname{ch}(y)\operatorname{sh}(x)$ ....

b) $\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$ ....

Résolution d'équations

Calcul 14.4 — Fonctions $x \longmapsto a^x$.

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a) $3^x = \dfrac{9^x}{2}$ ....

b) $4^x = 2 \times 2^x$ ....

c) $2^x = 3 \times 4^x$ ....

d) $10^{2x} = 4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}}$ ...

Calcul 14.5 — Fonctions $x \longmapsto a^x$: plus difficile..

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
On pourra faire intervenir une équation de degré 2 en posant une nouvelle variable.

a) $2^x + 4^x = 4$ ....

b) $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0$ ....

c) $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0$ ....

d) $3^x + 3^{2x} - 1 = 0.$ ....

Calcul 14.6 — Équations avec les fonctions circulaires réciproques.

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in [-1, 1]$ pour les deux premiers calculs, et $x \in \mathbb{R}$ pour les autres.

a) $\text{Arcsin}(x) = \dfrac{\pi}{2}$ ....

b) $\cos(\text{Arccos}(x)) = 0$ ....

c) $\text{Arccos}(\cos(x)) = 0$ ....

d) $\text{Arcsin}(\sin(x)) = \dfrac{\pi}{3}$ ....

e) $\text{Arcsin}(\sin(x)) = \dfrac{1}{3}$ ....

f) $\tan(\text{Arctan}(x)) = 1$ ....

Calcul 14.7 — Équations avec des fonctions hyperboliques.

Résoudre les (in)équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\text{th}(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x)$.

a) $\text{ch}(x) = \sqrt{5}$ ....

b) $\text{sh}(x) = 1$ ....

c) $\text{th}(x) = \dfrac{1}{3}$ ....

d) $\text{ch}(x) \leqslant 4$ ....

e) $\text{sh}(x) \geqslant 3$ ....

f) $\text{th}(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ ....

Dérivation

Calcul 14.8 — Quelques calculs de dérivées.

Dériver les fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto 2^x + x^2$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{3^x}{5^x + 1}$ ....

c) $x \longmapsto x^x$ ....

d) $x \longmapsto \dfrac{\text{Arcsin}(x)}{\text{Arccos}(x)}$ ....

Calcul 14.9 — Quelques calculs de dérivées – bis.

Dériver les fonctions suivantes. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\operatorname{th}(x) = \operatorname{sh}(x)/\operatorname{ch}(x)$.

a) $x \longmapsto \operatorname{Arcsin}(x^2)$ .....

b) $x \longmapsto \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)$ .....

c) $x \longmapsto \operatorname{Arctan}(\operatorname{th}(x))$.

d) $x \longmapsto \operatorname{sh}(\operatorname{ch}(x))$ ......

Calcul 14.10 — Deux dérivées importantes.

a) $x \longmapsto \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arccos}(x)$ ....

b) $x \longmapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ....

Calcul 14.11 — Dérivées plus compliquées.

Dériver les fonctions suivantes. La fonction F est une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

a) $x \mapsto F(x^x)$ ....

b) $x \mapsto F(\sqrt{\ln(\operatorname{ch}(x))})$ ....

c) $x \mapsto \sqrt{1-x^2} + x\operatorname{Arcsin}(x)$ ....

d) $x \mapsto x\operatorname{Arctan}(x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$ ....

Réponses mélangées

$-\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$ $\quad 1 \quad$ $\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}$ $\quad$ $\left\{\frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pi - \frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad$ $1 - \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ $\quad$ $x \mapsto \dfrac{15^x \ln(3/5) + 3^x \ln(3)}{(5^x+1)^2}$

$\dfrac{5}{4}$ $\quad$ $\ln(1+\sqrt{2})$ $\quad$ $x \mapsto \operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}^2(x)$ $\quad$ $x \mapsto (\ln(x)+1)x^x \mathrm{e}^{-x^{2x}}$ $\quad$ $\left[\ln(3+\sqrt{10}), +\infty\right[$

$\operatorname{sh}(x+y)$ $\quad$ $\{\ln(\sqrt{5}-2); \ln(\sqrt{5}+2)\}$ $\quad$ $\dfrac{13}{12}$ $\quad$ $x \mapsto (\ln(x)+1)x^x$ $\quad$ $\dfrac{\pi}{4}$

$\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad 1 \quad$ $x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x)$ $\quad$ $\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln(3)}$ $\quad$ $x \mapsto \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(\operatorname{ch}(x))$ $\quad$ $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$

$x \mapsto \ln(2) \times 2^x + 2x$ $\quad$ $x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)^2} \dfrac{1}{2\sqrt{\ln(\operatorname{ch}(x))}}$ $\quad$ $\dfrac{\pi}{3}$ $\quad 1 \quad$ $\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad 1$

$\operatorname{ch}(x+y)$ $\quad$ $x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)$ $\quad$ $[-\ln(4+\sqrt{15}), \ln(4+\sqrt{15})]$ $\quad$ $x \mapsto 0$ $\quad$ $x \mapsto \dfrac{1-\operatorname{th}^2(x)}{1+\operatorname{th}^2(x)}$

$\dfrac{\ln(4)}{\ln(20/3)}$ $\quad$ $\dfrac{3}{5}$ $\quad$ $x \mapsto 0$ $\quad$ $\dfrac{4}{3}$ $\quad 0 \quad$ $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\ln(3)\right]$ $\quad$ $\dfrac{\pi}{4}$ $\quad 2 \quad$ $\left\{0; \dfrac{1}{2}\right\}$

$\dfrac{\pi}{6}$ $\quad$ $\dfrac{\pi}{6}$ $\quad$ $\dfrac{1}{2}\ln(2)$ $\quad$ $x \mapsto \dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\operatorname{Arccos}(x)^2}.$ $\quad$ $x \mapsto 2x\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ $\quad 0$

Fiche de calcul n° 15

Primitives

Prérequis
Intégration de Terminale. Dérivée d'une fonction composée.
Trigonométrie directe et réciproque. Trigonométrie hyperbolique.

Pour chaque fonction à intégrer on pourra commencer par chercher les domaines où elle admet des primitives.

Calculs directs

Calcul 15.1

Déterminer directement une primitive des expressions suivantes.

a) $\dfrac{1}{t+1}$ ....

b) $\dfrac{3}{(t+2)^2}$ ....

c) $\dfrac{3}{(t+2)^3}$ ....

d) $\sin(4t)$ ....

Calcul 15.2

Même exercice.

a) $\sqrt{1+t} - \sqrt[3]{t}$ ....

b) e^{2t+1} ....

c) $\dfrac{1}{\sqrt{1-4t^2}}$ ....

d) $\dfrac{1}{1+9t^2}$ ....

Utilisation des formulaires

Calcul 15.3 — Dérivée d'une fonction composée.

Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\dfrac{2t^2}{1+t^3}$ ....

b) $t\sqrt{1+2t^2}$ ....

c) $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ ....

d) $\dfrac{7t}{\sqrt[3]{1+7t^2}}$ ....

e) $\dfrac{t}{1+3t^2}$ ....

f) $\dfrac{12t}{(1+3t^2)^3}$ ....

Calcul 15.4 — Dérivée d'une fonction composée – *bis.*

Même exercice.

a) $\dfrac{\ln^3 t}{t}$ ....

b) $\dfrac{1}{t\sqrt{\ln t}}$ ....

c) $\dfrac{8\mathrm{e}^{2t}}{(3-\mathrm{e}^{2t})^3}$ ....

d) $\dfrac{1}{t^2\sqrt{t}}$ ....

e) $\dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^t}$ ....

f) $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}{t^2}$ ....

Calcul 15.5 — **Trigonométrie.**

Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\cos^2(t)\sin(t)$ .....

f) $\dfrac{\cos(\pi \ln t)}{t}$ ....

k) $\dfrac{1+\tan^2 t}{\tan^2 t}$ ....

b) $\cos(t)\mathrm{e}^{\sin t}$ ....

g) $\tan^2 t$ ....

l) $\dfrac{\cos t}{(1-\sin t)^3}$ ......

c) $\tan t$ ....

h) $\tan^3 t$ ....

m) $\dfrac{1}{1+4t^2}$ ....

d) $\dfrac{\cos t}{1-\sin t}$ ....

i) $\dfrac{\tan^3 t}{\cos^2 t}$ ....

n) $\dfrac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}}$ ....

e) $\dfrac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$ ....

j) $\dfrac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan(t)}}$ ..

o) $\dfrac{\mathrm{Arcsin}(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ ....

Calcul 15.6 — **Trigonométrie –** ***bis.***

Déterminer une primitive des expressions suivantes en utilisant d'abord le formulaire de trigonométrie.

a) $\cos^2 t$ ....

c) $\sin^3 t$ ....

e) $\dfrac{1}{\sin(t)\cos(t)}$ .....

b) $\cos(t)\sin(3t)$ ....

d) $\dfrac{\sin(2t)}{1+\sin^2 t}$ ....

f) $\dfrac{1}{\sin(4t)}$ ....

Calcul 15.7 — **Fractions rationnelles.**

Déterminer une primitive des expressions suivantes après quelques manipulations algébriques simples.

a) $\dfrac{t^2+t+1}{t^2}$ ......

d) $\dfrac{1-t^6}{1-t^2}$ ....

g) $\dfrac{t^3}{t+1}$ ....

b) $\dfrac{t^2+1}{t^3}$ ....

e) $\dfrac{t^3+1}{t+1}$ ....

h) $\dfrac{t-1}{t^2+1}$ ....

c) $\dfrac{t^2}{t^2+1}$ ....

f) $\dfrac{t-1}{t+1}$ ....

i) $\dfrac{t}{(t+1)^2}$ ....

Dériver puis intégrer, intégrer puis dériver

Calcul 15.8

Pour chacune des expressions suivantes :

- dériver puis factoriser l'expression ;
- intégrer l'expression.

a) t^2-2t+5 .....

f) e^{3t-2} ....

b) $\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{1}{t}$ ....

g) $\dfrac{t^2}{t^3-1}$ ....

c) $\sqrt{t}-\dfrac{1}{t^3}$ ....

h) $\dfrac{3t-1}{t^2+1}$ ....

d) $\dfrac{1}{t^4}+\dfrac{1}{t\sqrt{t}}$ ....

i) $\sin(t)\cos^2(t)$ ...

e) $\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-3t}$ ......

j) $\mathrm{sh}(t)\mathrm{ch}(t)$ ......

k) $\dfrac{1}{t^2}\sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$ .....

l) $\dfrac{\mathrm{e}^t}{2+\mathrm{e}^t}$ ....

m) $\dfrac{\sin t}{2+3\cos t}$ ......

n) $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ ....

o) $\dfrac{\sin(2t)}{1+\cos^2(t)}$ .....

p) $t\mathrm{e}^{-t^2}$ ....

q) $\dfrac{1-\ln t}{t}$ ....

r) $\dfrac{1}{t\ln t}$ ....

s) $\dfrac{\sin(\ln t)}{t}$ ....

t) $\dfrac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}}$ ....

Calcul 15.9 — ***Bis repetita.***

Reprendre l'exercice précédent en commençant par intégrer puis en dérivant et factorisant.

Réponses mélangées

$\frac{1}{\pi}\sin(\pi\ln t)$ $\quad$ $\frac{1}{3}\mathrm{Arctan}(3t)$ $\quad$ $-\frac{1}{\tan t}$ $\quad$ $\ln(1+\sin^2 t)$ $\quad$ $\frac{1}{2\sqrt{t}}+\frac{3}{t^4}$ puis $\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2t^2}$

$\frac{1}{4}\tan^4 t$ $\quad$ $2\frac{3\cos^2 t-1}{(1+\cos^2 t)^2}$ puis $-\ln(1+\cos^2(t))$ $\quad$ $2\sqrt{\tan(t)}$ $\quad$ $-\frac{2t\sin\left(\frac{1}{t}\right)+\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^4}$ puis $\cos\left(\frac{1}{t}\right)$

$-\frac{3t^2-2t-3}{(t^2+1)^2}$ puis $\frac{3}{2}\ln(t^2+1)-\mathrm{Arctan}(t)$ $\quad$ $\frac{1}{2}\ln(1+t^2)-\mathrm{Arctan}(t)$ $\quad$ $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t+1}$

$\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}$ $\quad$ $\frac{2\cos(t)+3}{(2+3\cos t)^2}$ puis $-\frac{1}{3}\ln(|2+3\cos t|)$ $\quad$ $\frac{2}{(3-\mathrm{e}^{2t})^2}$ $\quad$ $-\frac{1}{(1+3t^2)^2}$

$2(t-1)$ puis $\frac{1}{3}t^3-t^2+5t$ $\quad$ $\frac{2}{3}\ln(|1+t^3|)$ $\quad$ $t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}$ $\quad$ $\ln t-\frac{1}{2t^2}$ $\quad$ $\frac{3}{4}(1+7t^2)^{\frac{2}{3}}$

$\frac{1}{2}\frac{1}{(1-\sin t)^2}$ $\quad$ $-\frac{1+\ln t}{t^2\ln^2 t}$ puis $\ln(|\ln t|)$ $\quad$ $-\frac{3}{t+2}$ $\quad$ $\frac{\cos(\ln t)-\sin(\ln t)}{t^2}$ puis $-\cos(\ln t)$

$-\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}$ $\quad$ $-\frac{4}{t^5}-\frac{3}{2}\frac{1}{t^{5/2}}$ puis $-\frac{1}{3}\frac{1}{t^3}-\frac{2}{\sqrt{t}}$ $\quad$ $t-2\ln(|t+1|)$ $\quad$ $-\frac{2}{3t^{\frac{3}{2}}}$ $\quad$ $\mathrm{e}^{\sin t}$ $\quad$ $\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^t)$

$\frac{1}{4}\ln^4 t$ $\quad$ $\mathrm{sh}(t)^2+\mathrm{ch}(t)^2$ puis $\frac{1}{2}\mathrm{sh}^2(t)$ $\quad$ $-\frac{1}{t^2}\left(\frac{2}{t}+1\right)$ puis $-\frac{1}{t}+\ln(|t|)$ $\quad$ $t+\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}$

$-\frac{\cos(4t)}{4}$ $\quad$ $t+\ln t-\frac{1}{t}$ $\quad$ $\frac{2\mathrm{e}^t}{(2+\mathrm{e}^t)^2}$ puis $\ln(2+\mathrm{e}^t)$ $\quad$ $2\sqrt{\ln t}$ $\quad$ $t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\ln(|t+1|)$

$\frac{1}{2}\mathrm{Arcsin}(2t)$ $\quad$ $-\ln(|\cos t|)$ $\quad$ $-\frac{t(t^3+2)}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2}$ puis $\frac{1}{3}\ln(|t^3-1|)$ $\quad$ $\ln(|t+1|)$

$-\ln(|1-\sin t|)$ $\quad$ $\frac{1}{2}\mathrm{Arctan}(2t)$ $\quad$ $(1-2t^2)\mathrm{e}^{-t^2}$ puis $-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}$ $\quad$ $-2\cos(\sqrt{t})$ $\quad$ $\frac{1}{6}\ln(1+3t^2)$

$\ln(|t+1|)+\frac{1}{t+1}$ $\quad$ $3\mathrm{e}^{3t-2}$ puis $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t-2}$ $\quad$ $-\frac{\cos(4t)}{8}-\frac{\cos(2t)}{4}$ $\quad$ $\frac{1}{4}\ln(|\tan 2t|)$ $\quad$ $t-\mathrm{Arctan}(t)$

$-\sqrt{1-t^2}$ $\quad$ $\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}$ $\quad$ $\frac{1}{2}\tan^2(t)+\ln(|\cos t|)$ $\quad$ $\cos(t)(3\cos^2 t-2)$ puis $-\frac{1}{3}\cos^3 t$

$\frac{1}{(1-t^2)^{3/2}}$ puis $-\sqrt{1-t^2}$ $\quad$ $\tan(t)-t$ $\quad$ $\frac{1}{2}(\mathrm{Arcsin}(t))^2$ $\quad$ $2\mathrm{e}^{2t}-3\mathrm{e}^{-3t}$ puis $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t}$

$\ln\left(|1-\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^t|\right)$ $\quad$ $-\frac{3}{2(t+2)^2}$ $\quad$ $\frac{1}{6}(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}$ $\quad$ $-\frac{\mathrm{e}^t(\mathrm{e}^{2t}-1)}{(1+\mathrm{e}^{2t})^2})$ puis $\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^t)$

$\ln(|\tan t|)$ $\quad$ $-\cos(t)+\frac{1}{3}\cos^3 t$ $\quad$ $\frac{\ln(t)-2}{t^2}$ puis $\ln(t)-\frac{1}{2}\ln^2(t)$ $\quad$ $-\frac{1}{3}\cos^3(t)$

Fiche de calcul n° 16

Calcul d'intégrales

Prérequis

Primitives usuelles, composées simples.

Intégrales et aires algébriques

On rappelle que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses du repère lorsque les bornes sont « dans le bon sens ».

Calcul 16.1

Sans chercher à calculer les intégrales suivantes, donner leur signe.

a) $\displaystyle\int_{-2}^{3} x^2 + \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

b) $\displaystyle\int_{5}^{-3} |\sin(x)|\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{0}^{-1} \sin x\,\mathrm{d}x$ . . .

Calcul 16.2

En se ramenant à des aires, calculer de tête les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{1}^{3} 7\,\mathrm{d}x$ . . . .

b) $\displaystyle\int_{7}^{-3} -5\,\mathrm{d}x$ . . . . .

c) $\displaystyle\int_{0}^{7} 3x\,\mathrm{d}x$ . . . . . .

d) $\displaystyle\int_{2}^{8} 1-2x\,\mathrm{d}x$ . .

e) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sin x\,\mathrm{d}x$ . . . .

f) $\displaystyle\int_{-2}^{1} |x|\,\mathrm{d}x$ . . . . . .

Calcul d'intégrales

On rappelle que si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, que l'on note $\Big[F(x)\Big]_a^b$.

Calcul 16.3 — Polynômes.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} 2\,\mathrm{d}x$ . . . .

b) $\displaystyle\int_{1}^{3} 2x-5\,\mathrm{d}x$ . . . .

c) $\displaystyle\int_{-2}^{0} x^2+x+1\,\mathrm{d}x$ . . . .

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3x^5-5x^3\,\mathrm{d}x$ . . . .

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^5-x^4\,\mathrm{d}x$ . . . .

f) $\displaystyle\int_{1}^{-1} x^{100}\,\mathrm{d}x$ . . . .

Calcul 16.4 — Fonctions usuelles.

Calculer.

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x\,\mathrm{d}x$ . . .

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,\mathrm{d}x$ . . .

c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ . . . .

d) $\displaystyle\int_{1}^{100} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ . . .

e) $\displaystyle\int_{-3}^{2} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ . . . . . .

f) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ . . . .

Calcul 16.5 — De la forme $f(ax+b)$.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (2x+1)^3 \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-2}^{4} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1} \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\pi x+2}$ ....

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\Big(\frac{\pi}{3}-x\Big) \,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 16.6 — Fonctions composées.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{x-2}{x^2-4x+5} \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\sin(x^2+1) \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \tan x \,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(x)\cos^5(x) \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\mathrm{e}^{x^2-1} \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{(x^2+1)^4} \,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 16.7 — Divers.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+1} \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x+1| \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \max(1,\mathrm{e}^x) \,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{3x-2\ln x}{x} \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(x) \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos(x)\sin(x)| \,\mathrm{d}x$ ......

Calcul 16.8 — Avec les nouvelles fonctions de référence.

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{Arcsin}(x) \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{2} 10^x \,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \mathrm{ch}(x) \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{x} \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2} \,\mathrm{d}x$ ....

Réponses mélangées

0 $\quad 0 \quad \dfrac{1}{\pi}\ln\Big(1+\dfrac{\pi}{2}\Big) \quad \dfrac{99}{\ln 10} \quad -\dfrac{1}{3} \quad \mathrm{e}^2 \quad \dfrac{147}{2} \quad \dfrac{1}{2}\Big(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\Big) \quad \dfrac{5}{2} \quad -\ln 3 \quad 6$

$\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-3} \quad -54 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -\dfrac{2}{101} \quad \dfrac{17}{2} \quad 18 \quad \dfrac{2}{3} \quad \dfrac{\pi}{4} \quad \dfrac{\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}}{2} \quad \dfrac{2\pi}{9}$

$3\mathrm{e}-4 \quad 0 \quad \dfrac{8}{3} \quad 14 \quad 2(\mathrm{e}^3-1) \quad \dfrac{1}{384} \quad -2 \quad \ln\Big(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Big) \quad 50$ Négatif $\quad 8$

Positif $\quad \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad 78$ Positif $\quad \dfrac{7}{48} \quad \dfrac{1}{2} \quad \dfrac{5}{8} \quad 1 \quad \dfrac{\sqrt{2}}{6} \quad -\dfrac{1}{30} \quad \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\mathrm{e}+1}$

Fiche de calcul n° 17

Intégration par parties

Prérequis

Primitives, dérivées, intégration par parties.

On rappelle le théorème d'intégration par parties. Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, si $u \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ et si $v \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Intégrales

Calcul 17.1

Calculer :

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^1 (2t+3)\mathrm{sh}(2t)\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^2 t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_1^{\ln 2} t2^t\,\mathrm{d}t$ ....

e) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln t\,\mathrm{d}t$ ....

f) $\displaystyle\int_1^2 t\ln t\,\mathrm{d}t$ ....

g) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$ ....

h) $\displaystyle\int_0^1 t\mathrm{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t$ ....

i) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{Arcsin}(t)\,\mathrm{d}t$ ....

j) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$ ....

k) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t$ ....

l) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\tan^2 t\,\mathrm{d}t$ ....

Primitives

Calcul 17.2

Pour chaque fonction suivante, préciser sur quel ensemble elle est définie, puis en déterminer une primitive.

a) $x \longmapsto (-x+1)\mathrm{e}^x$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ ....

c) $x \longmapsto \mathrm{Arctan}(x)$ .....

d) $x \longmapsto x\mathrm{ch}(x)$ ....

Intégrations par parties successives

Pour ces calculs de primitives et d'intégrales, on pourra réaliser plusieurs intégrations par parties successives.

Calcul 17.3 — Calcul d'intégrales.

a) $\displaystyle\int_0^1 (t^2+3t-4)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 17.4 — Calcul de primitives.

Calculer des primitives des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \sin(x)\mathrm{sh}(x)$ ....

b) $x \longmapsto \ln^2(x)$ ....

c) $x \longmapsto (x\ln x)^2$ ....

d) $x \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{Arccos}(x)}$ ......

Réponses mélangées

4 $\quad \left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x^3\left(\frac{1}{3}\ln^2(x)-\frac{2}{9}\ln(x)+\frac{2}{27}\right)\end{array}\right.$ $\quad 1$ $\quad \left\{\begin{array}{rcl}]-1,1[& \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{Arccos}(x)}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & -\frac{1+\ln x}{x}\end{array}\right.$ $\quad \dfrac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)}-2\ln(2)-2^{\ln(2)}+2}{(\ln(2))^2}$ $\quad \left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x\mathrm{sh}(x)-\mathrm{ch}(x)\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x\mathrm{Arctan}(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\end{array}\right.$ $\quad -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+\dfrac{4}{3}$ $\quad \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{\pi^2}{32}$ $\quad \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$

$\ln(2)-2+\dfrac{\pi}{2}$ $\quad \left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & (-x+2)\mathrm{e}^x\end{array}\right.$ $\quad \dfrac{\pi}{2}-1$ $\quad \left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x\ln^2(x)-2x\ln(x)+2x\end{array}\right.$

$\dfrac{5}{2}-\mathrm{e}^2$ $\quad \left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{1}{2}(-\cos(x)\mathrm{sh}(x)+\sin(x)\mathrm{ch}(x))\end{array}\right.$ $\quad \dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1$

$\dfrac{5}{2}\mathrm{ch}(2)-\dfrac{1}{2}\mathrm{sh}(2)-\dfrac{3}{2}$ $\quad \dfrac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2)-\dfrac{8}{9}\sqrt{2}+\dfrac{4}{9}$ $\quad \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$ $\quad 2\ln 2-\dfrac{3}{4}$

Fiche de calcul n° 18

Changements de variable

Prérequis

Primitives, dérivées. Changements de variables. Intégration par parties.

Changements de variable

Calcul 18.1

Effectuer le changement de variable indiqué et en déduire la valeur de l'intégrale.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ avec $t = \sin\theta$ ....

b) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \mathrm{e}^t$ ....

d) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sin t$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)\cos^3(t)\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sin t$ ....

f) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

Calcul 18.2

Même exercice.

a) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\sin(t)}{3+\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \cos t$ ....

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{2+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \mathrm{e}^t$ ....

c) $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{1}{\sqrt{4t-t^2}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \dfrac{t}{2} - 1$ ....

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ avec $t = \tan u$ ....

e) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \dfrac{1}{t}$ ....

f) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(t)}{t+t\ln^2(t)}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \ln t$ ....

Changements de variable et intégrations par parties

Calcul 18.3

Effectuer le changement de variable indiqué, continuer avec une intégration par parties et en déduire la valeur de l'intégrale.

a) $\displaystyle\int_1^4 \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

b) $\displaystyle\int_3^4 \frac{\ln\left(\sqrt{t}-1\right)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

Calculs de primitives par changement de variable

Calcul 18.4

Déterminer une primitive de f en utilisant le changement de variable donné.

a) $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\longmapsto \dfrac{\cos(x)+\sin(x)}{\sin(x)\cos^2(x)}$ avec $u = \tan x$ ....

b) $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}$ avec $u = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$ ....

c) $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{1}{x + \sqrt[3]{x}}$ avec $u = \sqrt[3]{x}$ ....

d) $x > 1 \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ avec $u = \sqrt{x^2-1}$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{1}{4}$ $\quad\dfrac{\pi}{6}$ $\quad\dfrac{\pi}{2}$ $\quad\left\{\begin{array}{ccc} \left]0, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) + \ln(\tan(x)) \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\right) \end{array}\right.$ $\quad 2\mathrm{Arctan}(e) - \dfrac{\pi}{2}$ $\quad 2\mathrm{e}^2$ $\quad\dfrac{\pi}{2}$ $\quad\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2\mathrm{e}+1}{3}\right)$

$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{3}{2}\ln(x^{\frac{2}{3}} + 1) \end{array}\right.$ $\quad\dfrac{1}{4} + \dfrac{\pi}{8}$ $\quad\dfrac{\pi}{12}$ $\quad\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{2}$ $\quad\dfrac{1}{12}$ $\quad 2\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

$\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$ $\quad\left\{\begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{x^2-1}\right) \end{array}\right.$ $\quad -2((\sqrt{3}-1)\ln(\sqrt{3}-1) - 4 + 2\sqrt{3}$

Fiche de calcul n° 19

Intégration des fractions rationnelles

Prérequis
Fonctions ln et Arctan. Division euclidienne entre polynômes.
Petites décompositions en éléments simples.
Forme canonique d'un trinôme du second degré.
Changements de variable affines dans les intégrales.

Premier cas

Calcul 19.1

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t$ .... $\square$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2t+1}\,\mathrm{d}t$ .... $\square$

Calcul 19.2

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{\frac{t}{2}+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t$ .... $\square$

b) $\displaystyle\int_0^{a^2} \frac{1}{t+a}\,\mathrm{d}t$ .... $\square$

Deuxième cas

Calcul 19.3

Calculer les intégrales suivantes, en effectuant d'abord une division euclidienne entre le numérateur et le dénominateur des fractions en jeu.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1+t+t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t$ .... $\square$

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1+2t+3t^2}{4t+5}\,\mathrm{d}t$ .... $\square$

Troisième cas

Dans ce troisième cas, il s'agit de reconnaître un expression du type $\frac{u'}{u}$.

Calcul 19.4

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$ .... $\square$

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\frac{t^2}{2}+\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t$ .... $\square$

Calcul 19.5

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}{t^2+\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t$ .... $\square$

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{1} \frac{t}{at^2+1}\,\mathrm{d}t$ .... $\square$

Quatrième cas

Calcul 19.6 — Exemple détaillé d'un calcul d'intégrale.

a) Quels sont les deux zéros de $t \longmapsto t^2 - 3t + 2$? ....

b) Trouver deux réels A et B tels que

pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, on ait $\dfrac{1}{(t-1)(t-2)} = \dfrac{A}{t-1} + \dfrac{B}{t-2}$ ....

c) Calculer $\displaystyle\int_3^4 \frac{2}{(t-1)(t-2)}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 19.7

Calculer les intégrales suivantes, en procédant comme ci-dessus.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{t^2-4}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{2}{t^2-t}\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+4t+3}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4t^2-1}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 19.8

Soit $a \in \,]0,1[$. Calculer $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{t^2-a}\,\mathrm{d}t$ ....

Cinquième cas

Calcul 19.9 — Une primitive à retenir.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

a) Calculer la dérivée de $x \longmapsto \dfrac{1}{a}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ ....

b) Donner une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{a^2+x^2}$ ....

Calcul 19.10

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+3}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 19.11

Calculer $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t$ ....

Synthèse

Calcul 19.12 — **Mise sous forme canonique.**

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Mettre sous forme canonique les expressions suivantes (où $x \in \mathbb{R}$).

a) $x^2 + x + 1$ ....

b) $2x^2 - 3x + 1$ ....

c) $\sqrt{2}x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}$ ....

d) $ax^2 + a^2x + a^3$ ....

Calcul 19.13

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+2t+t^2}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2-5t+1}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 19.14

Soit $a > 1$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3t^2+2t+\frac{4}{9}}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2-(2a+1)t+a^2+a}\,\mathrm{d}t$ ....

Un calcul plus difficile

Calcul 19.15

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)$ $\quad$ $\dfrac{a}{a^2+x^2}$ $\quad$ $\dfrac{3}{2}+\ln(2)-\ln(3)$ $\quad$ $\ln(2)$ $\quad$ $\ln\left(\dfrac{7}{3}\right)$ $\quad$ $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

$A=-1$ et $B=1$ $\quad$ $\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\sqrt{2}\dfrac{15}{16}$ $\quad$ $\dfrac{1}{2}$ $\quad$ $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ $\quad$ $\ln\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1}{5}$ $\quad$ $\dfrac{\pi}{12}$ $\quad$ $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{a}-a}{a+\sqrt{a}}\right)$ $\quad$ $2\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$ $\quad$ $-\dfrac{1}{48}+\dfrac{51}{64}\ln\left(\dfrac{21}{19}\right)$ $\quad$ $\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$

1 et 2 $\quad$ $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ $\quad$ $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$ $\quad$ $2\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$ $\quad$ $\dfrac{1}{3}\left(\ln(2)+\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$ $\quad$ $\ln\left(\dfrac{33}{28}\right)$ $\quad$ $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$

$\ln\left(\dfrac{a^2}{a^2-1}\right)$ $\quad$ $\ln\left(2\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$ $\quad$ $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ $\quad$ $\ln(a+1)$ $\quad$ $\dfrac{1}{2a}\ln\left(\dfrac{a+1}{2}\right)$

$\dfrac{1}{a}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ $\quad$ $a\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3a^3}{4}$ $\quad$ $2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}$ $\quad$ $\dfrac{\pi}{4}$ $\quad$ $2\ln\left(\dfrac{9}{10}\right)$

Fiche de calcul n° 20

Équations différentielles

Prérequis
Équations différentielles.

Équations d'ordre 1 à coefficients constants

Calcul 20.1

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y' = 12y \quad \text{et} \quad y(0) = 56$ ....

b) $y' = y + 1 \quad \text{et} \quad y(0) = 5$ ....

c) $y' = 3y + 5 \quad \text{et} \quad y(0) = 1$ ....

d) $y' = 2y + 12 \quad \text{et} \quad y(0) = 3$ ....

Calcul 20.2

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $5y' = -y \quad \text{et} \quad y(1) = \mathrm{e}$ ....

b) $7y' + 2y = 2 \quad \text{et} \quad y(7) = -1$ ....

c) $y' - \sqrt{5}y = 6 \quad \text{et} \quad y(0) = \pi$ ....

d) $y' = \pi y + 2\mathrm{e} \quad \text{et} \quad y(\pi) = 12$ ....

Équations d'ordre 2, homogènes, à coefficients constants

Calcul 20.3 — Une équation avec conditions initiales.

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ ....

b) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ ....

c) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 3$ ....

d) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 3\mathrm{i}$ ....

Calcul 20.4 — Racines doubles, Racines simples.

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y'' - y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ ....

b) $y'' + 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 2$ et $y'(0) = 3$ ....

c) $y'' + y' - 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ ....

d) $y'' - 2y' + y = 0$ et $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$ ....

e) $y'' + 4y' + 4y = 0$ et $y(1) = 1$ et $y'(1) = -3$ ....

Calcul 20.5 — Racines complexes.

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y'' + y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ ....

b) $y'' + y' + y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$ ....

c) $y'' + 2y' + 2y = 0$ et $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ ....

d) $y'' - 2y' + 5y = 0$ et $y(0) = \mathrm{i}$ et $y'(0) = -\mathrm{i}$ ....

Réponses mélangées

$x \mapsto 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}$ $\quad x \mapsto \mathrm{e}^{x}$ $\quad x \mapsto 7\mathrm{e}^{-x} - 5\mathrm{e}^{-2x}$ $\quad x \mapsto 9\mathrm{e}^{2x} - 6$ $\quad x \mapsto \mathrm{e}^{x}$ $\quad x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$

$x \mapsto \mathrm{e}^{-x/2}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right)$ $\quad x \mapsto 1 - 2\mathrm{e}^{-2x/7+2}$ $\quad x \mapsto \left(\frac{6}{\sqrt{5}} + \pi\right)\mathrm{e}^{\sqrt{5}x} - \frac{6}{\sqrt{5}}$

$x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\sin(x)$ $\quad x \mapsto \mathrm{e}^{(6-x)/5}$ $\quad x \mapsto \mathrm{e}^{x}\left(\frac{-1+\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \frac{1+\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)$ $\quad x \mapsto (2-3\mathrm{i})\mathrm{e}^{x} + (3\mathrm{i}-1)\mathrm{e}^{2x}$

$x \mapsto \frac{4}{3}\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2x}$ $\quad x \mapsto 56\mathrm{e}^{12x}$ $\quad x \mapsto \cos(x) + 2\sin(x)$ $\quad x \mapsto 6\mathrm{e}^{x} - 1$

$x \mapsto (2-x)\mathrm{e}^{2-2x}$ $\quad x \mapsto \left(12 + \frac{2\mathrm{e}}{\pi}\right)\mathrm{e}^{\pi x - \pi^2} - \frac{2\mathrm{e}}{\pi}$ $\quad x \mapsto \frac{8\mathrm{e}^{3x} - 5}{3}$ $\quad x \mapsto (2-x)\mathrm{e}^{x}$

Fiche de calcul n° 21

Suites numériques

Prérequis
Suites récurrentes. Suites arithmétiques. Suites géométriques.

Calcul de termes

Calcul 21.1 — Suite explicite.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2n+3}{5} \times 2^{n+2}$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$:

a) u_0 ....

b) u_1 ....

c) u_{n+1} ....

d) u_{3n} ....

Calcul 21.2 — Suite récurrente.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3$. Calculer :

a) son troisième terme ....

b) u_3 ....

Calcul 21.3 — Suite récurrente.

On définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par $v_1 = \sqrt{2}$ et $\forall n \geqslant 1,\ v_{n+1} = \sqrt{v_n}$. Calculer :

a) v_3 ....

b) son sixième terme ....

Calcul 21.4 — Suite récurrente.

On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $w_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n^2$. Calculer :

a) w_2 ....

b) son centième terme ....

Calcul 21.5 — Suite explicite.

Soit la suite $(t_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \ln\left(\dfrac{n^n}{2^n}\right)$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

a) t_{2n} ....

b) t_{4n} ....

Suites arithmétiques et géométriques

Calcul 21.6 — Suite arithmétique.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2. Calculer :

a) a_{10} ....

b) $s_{100} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{99}$ ....

c) $a_{1\ 000}$ ....

d) $s_{101} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{100}$ ....

Calcul 21.7 — **Suite arithmétique.**

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r vérifiant que $b_{101} = \dfrac{2}{3}$ et $b_{103} = \dfrac{3}{4}$. Calculer :

a) b_{102} ....

b) r ....

Calcul 21.8 — **Suite géométrique.**

La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $g_0 = 3$ et de raison $\dfrac{1}{2}$. Calculer :

a) Son dixième terme est : ....

b) $\sigma_{10} = g_0 + g_1 + \ldots + g_9$ ....

c) g_{10} ....

d) $\sigma_{11} = g_0 + g_1 + \ldots + g_{10}$ ....

Calcul 21.9 — **Suite géométrique.**

La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q vérifiant que $h_{11} = \dfrac{5\pi}{11}$ et $h_{13} = \dfrac{11\pi}{25}$. Calculer :

a) h_{12} ....

b) q ....

Suites récurrentes sur deux rangs

Calcul 21.10

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par que $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$. Calculer :

a) u_n ....

b) u_5 ....

Calcul 21.11

Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par que $v_0 = 0$, $v_1 = \sqrt{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$. Calculer :

a) v_n ....

b) v_2 ....

Calcul 21.12 — **Suite de Fermat.**

Soit la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = 2^{2^n} + 1$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$:

a) F_3 ....

b) F_4 ....

c) $(F_{n-1} - 1)^2 + 1$ ....

d) $F_n \times (F_n - 2)$ ....

e) F_n^2 ....

f) $F_{n+1}^2 - 2(F_n - 1)^2$ ....

Réponses mélangées

$2^{\frac{1}{64}}$ $\quad F_n \quad \dfrac{12}{5} \quad 10\,000 \quad \dfrac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2} \quad 13 \quad 21 \quad 4n\ln(2n)$

$2 \quad \dfrac{1}{24} \quad 8 \quad 2\sqrt{2} \quad 2 \quad 65\,537 \quad \dfrac{11\sqrt{5}}{25} \quad \dfrac{17}{24} \quad 257 \quad 2^{\frac{1}{8}} \quad \dfrac{3069}{512}$

$3^n + (-2)^n \quad F_{n+2} \quad 29 \quad \dfrac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5} \quad \dfrac{3}{512} \quad \dfrac{\pi\sqrt{5}}{5} \quad 211 \quad 2n\ln(n)$

$2\,001 \quad \dfrac{6141}{1024} \quad F_{n+1} - 2 \quad F_{n+1} + 2^{2^n+1} \quad \dfrac{3}{1\,024} \quad \dfrac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5} \quad 10\,201$

Fiche de calcul n° 22

Calcul matriciel

Prérequis
Calculs algébriques (sommes), coefficients binomiaux.

Calcul matriciel

Calcul 22.1 — Calculs de produits matriciels.

Dans cet exercice, on note A, B, C, D, E les cinq matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits matriciels suivants.

a) A^2 . . .

b) A^3 . . .

c) $B \times E$

d) $E \times B$

e) $A \times E$

f) $B \times A$

g) D^2 . . .

h) $D \times C$

i) $B^\top \times B$

Calcul 22.2 — Calcul de puissances.

On note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice D étant de taille $n \times n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$), et où $\theta \in \mathbb{R}$.

Calculer le carré, le cube de chacune de ces matrices et utiliser ces calculs pour conjecturer leur puissance k-ième, pour $k \in \mathbb{N}$.

a) A^2 ...

b) A^3 ...

c) A^k ...

d) B^2 ...

e) B^3 ...

f) B^k ...

g) C^2 ...

h) C^3 ...

i) C^k ...

j) D^2 ...

k) D^3 ...

l) D^k ...

Calcul 22.3 — Calculs avec des sommes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $C = (c_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ les matrices de termes généraux suivants :

$$a_{ij} = \binom{i-1}{j-1}, \qquad b_{ij} = 2^i 3^{j-i}, \qquad c_{ij} = \delta_{i,j+1} + \delta_{i,j-1}.$$

Donner le coefficient d'indice (i, j) des matrices suivantes. On simplifiera au maximum le résultat obtenu et, notamment, on trouvera une expression sans le symbole $\sum$.

a) $A \times B$ ....

b) B^2 ....

c) $B^\top \times B$ ....

d) $A \times C$ ....

Calcul 22.4 — Deux calculs plus difficiles !.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
En utilisant les matrices de l'exercice précédent, calculer les termes généraux suivants.

a) $\left[A^2\right]_{i,j}$ ....

b) $\left[C^2\right]_{i,j}$ ....

Inversion de matrices

Calcul 22.5 — Détermination d'inversibilité, calcul d'inverses.

Dans cet exercice, on note les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & e \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \pi & \pi & 2\pi \\ \pi & 0 & 0 \\ -\pi & -2\pi & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, si elle existe, l'inverse de chacune des matrices. Si elle n'est pas inversible, indiquer dans la case « non inversible » .

a) A ...

d) D ...

g) G ...

b) B ...

e) E ...

h) H ..

c) C ...

f) F ...

i) J ...

Calcul 22.6 — Matrices dépendant d'un paramètre.

On note λ et μ deux paramètres réels. On note A et B les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Pour chaque matrice, donner une condition nécessaire et suffisante (abrégée ci-dessous en CNS) sur λ pour que la matrice soit inversible et en donner, dans ce cas, l'inverse.

a) CNS pour A inversible . .

b) Inverse de A . . .

c) CNS pour B inversible . .

d) Inverse de B . . .

Réponses mélangées

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 7 & 49 & -14 \\ -2 & -14 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & -6 & -5 \\ 15 & -1 & 11 \\ 18 & -26 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2(\pi - e)}\begin{pmatrix} 2 & -e \\ -2 & \pi \end{pmatrix} \qquad \text{Non inversible} \qquad \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 4 & -2 \\ -16 & -6 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda \neq 1$$

$$\begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \binom{i-1}{j} + \binom{i-1}{j-2} \qquad \begin{array}{c} (1-\delta_{i,1})(\delta_{i-1,j+1} + \delta_{i,j}) \\ +(1-\delta_{i,n})(\delta_{i,j} + \delta_{i+1,j-1}) \end{array}$$

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2^{i-j}\binom{i-1}{j-1} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2 \times 3^{j-i} \times 5^{i-1} \qquad n^{k-1}D \qquad \lambda \neq 1 \qquad \begin{pmatrix} n^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & (n^2) & \vdots \\ n^2 & \cdots & n^2 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad 2 \times 3^{i+j}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \qquad \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 9 & -7 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -5 & 15 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2\lambda + 2 & \lambda & -2\lambda - 1 \\ \lambda - 1 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ 8 & -6 & 4 & 2 \\ -7 & 5 & -3 & -1 \\ -5 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad 2^{i+1}3^{j-i}(2^n - 1) \qquad \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(3\theta) & -\sin(3\theta) \\ \sin(3\theta) & \cos(3\theta) \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -1 - \lambda + \lambda^2 & 1 - \lambda & 2 - \lambda \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 - \lambda^2 & \lambda - 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(17) \qquad \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 14 & -4 \\ -1 & -7 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 - 2\mathrm{i} \\ 1 & -1 + \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Fiche de calcul n° 23

Systèmes linéaires

Prérequis
Résolution par substitution d'une variable, par combinaisons linéaires de lignes.

Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

Calcul 23.1

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$.

a) $\begin{cases} x - 2\,y \;=\; 1 \\ 3\,x + 4\,y \;=\; 13 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} 2\,x + y \;=\; 16 \\ x - y \;=\; 5 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} 3\,x - 6y = -3 \\ 2\,x + 2\,y = 2 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} 3\,x - 4y = -\sqrt{2} \\ 6\,x + 2\,y = 3\sqrt{2} \end{cases}$ ....

Calcul 23.2 — Systèmes avec paramètre.

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ en fonction des valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = a \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} x - ay = 3a + 2 \\ ax + y = 2a - 3 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} 3x + 5y = a \\ 2x - y = a^2 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} x + 2y = 3a \\ 2x + 3y = 5a - a^2 \end{cases}$ ......

Systèmes de 2 équations à 3 inconnues

Calcul 23.3

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} x - y + 3z = 5/2 \\ x + 2y - z = 3/2 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} 5x + y + 2z = -5/2 \\ 2x - y + 2z = -5/3 \end{cases}$ ....

Systèmes de 3 équations à 3 inconnues

Calcul 23.4

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} a - b - c = -7 \\ 3a + 2b - c = 3 \\ 4a + b + 2c = 4 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x + 10y + z = 0 \end{cases}$ ......

d) $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ 4x + 5y + 4z = 1 \end{cases}$ ......

Calcul 23.5

On considère le système d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de a proposées.

a) $a = 0$ ....

b) $a = -2$ ....

c) $a = 3$ ....

d) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$. ....

Calcul 23.6

On considère le système d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètres $(a, c) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x - az = c \\ a\,x - y = c \\ a\,y - z = c. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de a et c proposées.

a) $a = 2$, $c = 7$ ....

b) $a = 1, c = 2$ ....

c) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ....

Calcul 23.7

On propose le système d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 4x + y + z = \lambda x \\ x + 4y + z = \lambda y \\ x + y + 4z = \lambda z. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de λ proposées.

a) $\lambda = 1$ ....

b) $\lambda = 3$ ....

c) $\lambda = 6$ ....

Réponses mélangées

$\{(2, -1, 3)\}$ $\quad$ $\{(5, 3, -1)\}$ $\quad$ $\varnothing$ $\quad$ $\left\{\left(\dfrac{13}{6} - \dfrac{5}{3}z, -\dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{3}z, z\right); z \in \mathbb{R}\right\}$

$\left\{\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)\right\}$ $\quad$ $\left\{\left(\dfrac{a^2 + a - 1}{a^3 - 1}c, \dfrac{a^2 - a - 1}{a^3 - 1}c, \dfrac{-a^2 + a + 1}{a^3 - 1}c\right)\right\}$ $\quad$ $\left\{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

$\left\{\left(1 - \dfrac{a}{4}, \dfrac{-1}{2} + \dfrac{3}{8}a\right)\right\}$ $\quad$ $\left\{\left(\dfrac{1}{13}a + \dfrac{5}{13}a^2, \dfrac{2}{13}a - \dfrac{3}{13}a^2\right)\right\}$ $\quad$ $\{(3, 1)\}$

$\{(0, 0, 0)\}$ $\quad$ $\{(5z, 1 - 4z, z)\ ;\ z \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $\{(x, y, -x - y)\ ;\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

$\varnothing$ $\quad$ $\{(7, 2)\}$ $\quad$ $\left\{\left(x, \dfrac{-5}{12} - \dfrac{3}{2}x, \dfrac{-25}{24} - \dfrac{7}{4}x\right); x \in \mathbb{R}\right\}$ $\quad$ $(a - 2a^2, a + a^2)$

$\{(1, y, 3 + 2y); y \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $(2, -3)$ $\quad$ $\varnothing$ $\quad$ $\{(1, 1/2, 1/2)\}$ $\quad$ $\{(1 + z, -z, z); z \in \mathbb{R}\}$

$\left\{\left(-\dfrac{2}{7} - z, \dfrac{-3}{7}, z\right)\ ;\ z \in \mathbb{R}\right\}$ $\quad$ $\{(x, x, x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $\left\{\left(1, \dfrac{1}{a + 2}, \dfrac{1}{a + 2}\right)\right\}$ $\quad$ $\{(-1, 4, 2)\}$

Fiche de calcul n° 24

Polynômes

Prérequis

Opérations sur les polynômes. Division Euclidienne. Évaluation. Racines.

Autour de la division euclidienne

Calcul 24.1 — Pour s'échauffer.

Pour chacun des cas ci-dessous, calculer le quotient Q et le reste R de la division euclidienne de A par B :

a) $A = X^3 + X^2 - X + 1, \quad B = X - 1$ ....

b) $A = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 1, \quad B = X^2 + X + 1$ ....

c) $A = X^5 + X^4 - X^3 + X - 1, \quad B = X^3 + X^2 + 2$ ....

d) $A = 26X^4 + 12X^3 - 11X^2 - 2X + 1, \quad B = 2X^3 - X^2 - X + 1$ ....

Calcul 24.2 — Avec des degrés arbitraires.

La lettre n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Pour chacun des cas ci-dessous, calculer le reste R de la division euclidienne de A par B :

a) $A = X^n$, $B = X - 1$ ....

b) $A = X^{3n+2} + X^{3n+1} + X^{3n}$, $B = X^2 + X + 1$ ....

c) $A = (X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2$, $B = (X-2)^2$ ....

d) $A = X^{n+2} + X^{n+1} - X^n$, $B = X^3 - 2X + 1$ ....

Calcul 24.3 — Avec des opérations.

Pour chacun des cas ci-dessous, calculer le reste R de la division euclidienne de P par X^4 :

a) $P = A + B$ où $A = X^5 + X - 2$ et $B = X^4 + X - 1$ ....

b) $P = A \times B$ où $A = 2X^3 - 3X^2 - X + 1$ et $B = X^2 + X + 1$ ....

c) $P = A \circ B$ où $A = X^2 - 3X + 1$ et $B = (X-2)^2$ ....

d) $P = A \circ B$ où $A = 2X^3 - 3X^2 - X + 1$ et $B = X^3 + X^2 - 2X + 1$ ....

Calcul 24.4 — Pour évaluer en un point.

Soit $P = X^6 - 2X^5 - 8X^4 - 22X^3 - 53X^2 - 56X - 20$.

a) Calculer le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$. ....

b) Calculer $P(\mathrm{i})$. ....

Calcul 24.5 — Pour évaluer en un point – bis.

Soit $P = X^6 - 2X^5 - 8X^4 - 22X^3 - 53X^2 - 56X - 20$.

a) Calculer le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 2$. ....

b) Calculer $P(\sqrt{2})$. ....

Calcul 24.6 — Pour évaluer en un point – ter.

Soit $P = X^6 - 2X^5 - 8X^4 - 22X^3 - 53X^2 - 56X - 20$.

En vous inspirant des deux exercices précédents, calculer :

a) $P(\sqrt{2} - 1)$. ....

b) $P(\mathrm{i} + 1)$. ....

Réponses mélangées

$8 - 206\mathrm{i}$ $\quad$ $Q = X^2 - 4X + 7$, $R = -3X - 8$ $\quad$ $24 - 36\mathrm{i}$ $\quad$ $R = -8X^3 + 21X^2 - 20X + 5$

$Q = 13X + \dfrac{25}{2}$, $R = \dfrac{1}{2}\left(29X^2 - 5X - 23\right)$ $\quad$ $R = -2X^3 - 3X^2 + 1$ $\quad$ $R = -29X^3 + 11X^2 + 2X - 1$

$Q = X^2 - 1$, $R = -X^2 + X + 1$ $\quad$ $-150 - 108\sqrt{2}$ $\quad$ $R = 1$ $\quad$ $76 - 92\sqrt{2}$

$R = -108X - 150$ $\quad$ $R = 0$ $\quad$ $R = -2nX + 2n - 1$ $\quad$ $R = X^2 + X - 1$

$R = -36X + 24$ $\quad$ $R = 2X - 3$ $\quad$ $Q = X^2 + 2X + 1$, $R = 2$

Fiche de calcul n° 25

Décomposition en éléments simples

Prérequis
Polynômes (factorisation, division euclidienne), primitives usuelles

Calculs de décompositions en éléments simples

Calcul 25.1 — Uniquement des pôles simples.

Effectuer la décomposition en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) des fractions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{X^4-2}{X(X+1)(X+2)}$ ....

b) $\dfrac{X^3+2}{(X-1)X(X+1)}$ ....

c) $\dfrac{X^2}{(X-\pi)(X+\pi)}$ ....

Calcul 25.2

Même exercice.

a) $\dfrac{X+1}{(X+2)(X+\mathrm{e})}$ ....

b) $\dfrac{X^2+X+1}{(X-i)(X+i)(X-1)}$ ....

c) $\dfrac{X^2+2}{(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{3})}$ ....

Calcul 25.3 — Avec des pôles multiples.

Effectuer la décomposition en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) des fractions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{X+1}{(X-1)^2(X-2)(X-3)}$ ..

b) $\dfrac{2+X^2}{(X+1)X^2(X-1)^2}$ ....

c) $\dfrac{1-X}{X(X+\pi)^2}$ ....

d) $\dfrac{1}{(X-i)^2(X-1-i)^2}$ ......

Calcul 25.4 — À vous de factoriser !.

Effectuer la décomposition en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) des fractions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{X-3}{X^4-1}$ ....

b) $\dfrac{2X^3+1}{X^4-3X^2+2X}$ ....

Calcul 25.5 — Calculs de sommes.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
Calculer les sommes suivantes, après avoir fait une décomposition en éléments simples de leur terme général.

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k(k+1)}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k^2-5k-2}{(k-1)k(k+1)(k+2)}$.

Calcul 25.6 — Calculs de sommes.

Effectuer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ des fractions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{2X+4}{(X+1)^2(X^2+1)}$ ....

b) $\dfrac{3}{(X-1)(X+1)(X^2+X+1)}$ ....

Calcul d'intégrales de fractions rationnelles

Calcul 25.7 — Pôles simples ou multiples.

Calculer les intégrales suivantes

a) $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x$ .....

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{(x+1)(x+2)(x-2)}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x}{(2x+1)(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$ .....

e) $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{1}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 25.8 — Primitives.

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-1}$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{1}{(1-2x)^3}$ ....

c) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+2}$ ....

d) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$ ....

e) $x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+2x+3}$ ....

f) $x \longmapsto \dfrac{x^4}{(x-1)(x-2)(x+1)}$ ....

g) $x \longmapsto \dfrac{x}{(x^2+2)(x+1)}$ ....

h) $x \longmapsto \dfrac{x-2}{(x+1)^2(x-1)^2}$ ....

Réponses mélangées

$x \mapsto \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{1}{6}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{16}{3}\ln|x-2|$ $\qquad -\dfrac{2}{n+2} + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{3}$ $\qquad x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$

$x \mapsto \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $\qquad \dfrac{2}{X+1} + \dfrac{1}{(X+1)^2} + \dfrac{1-2X}{X^2+1}$ $\qquad 1 + \dfrac{\pi}{2(X-\pi)} - \dfrac{\pi}{2(X+\pi)}$

$\dfrac{1}{2}\ln(2) - \dfrac{1}{4}\ln(3)$ $\qquad \frac{2}{X-i} + \frac{1}{(X-i)^2} - \frac{2}{X-(1+i)} + \frac{1}{(X-(1+i))^2}$ $\qquad \dfrac{-3}{X-2} + \dfrac{1}{X-3} + \dfrac{2}{X-1} + \dfrac{1}{(X-1)^2}$

$\dfrac{1}{2(X-1)} - \dfrac{3}{2(X+1)} + \dfrac{X-1}{X^2+X+1}$ $\qquad x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln|x^2+2x+3| - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$

$\dfrac{\mathrm{e}-1}{(\mathrm{e}-2)(X+\mathrm{e})} + \dfrac{1}{(2-\mathrm{e})(X+2)}$ $\qquad 1 - \dfrac{2}{X} + \dfrac{1}{2(X+1)} + \dfrac{3}{2(X-1)}$ $\qquad \dfrac{2}{3} - 4\ln(2) + 2\ln(3)$

$1 - 2\ln(3)$ $\qquad \dfrac{3}{2(X-1)} - \dfrac{1+i}{4(X-i)} - \dfrac{1-i}{4(X+i)}$ $\qquad x \mapsto \dfrac{1}{4(1-2x)^2}$

$x \mapsto \frac{1}{6}\ln(x^2+2) - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ $\qquad \dfrac{1}{2(n+1)} - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{4}$ $\qquad \dfrac{\pi}{8}$

$\frac{2}{X} + \frac{2}{X^2} - \frac{11}{4(X-1)} + \frac{3}{2(X-1)^2} + \frac{3}{4(X+1)}$ $\qquad \dfrac{1}{18} - \dfrac{1}{9}\ln(5) + \dfrac{2}{9}\ln(2)$ $\qquad x \mapsto \dfrac{1}{2}\dfrac{2x-1}{x^2-1} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|$

$\dfrac{1}{\pi^2 X} - \dfrac{1}{\pi^2(X+\pi)} - \dfrac{1+\pi}{\pi(X+\pi)^2}$ $\qquad 1 - \frac{5}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(X+\sqrt{3})} - \frac{4}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-X)}$

$\dfrac{1}{X+1} - \dfrac{1}{2(X-1)} - \dfrac{1+3i}{4(X-i)} - \dfrac{1-3i}{4(X+i)}$ $\qquad -\dfrac{1}{2}\ln(3) + \dfrac{2}{3}\ln(2)$ $\qquad x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{1+x}\right|$

$\dfrac{1}{2X} + \dfrac{5}{6(X+2)} + \dfrac{2}{3(X-1)} + \dfrac{1}{(X-1)^2}.$ $\qquad X - 3 - \dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{7}{X+2}$

Fiche de calcul n° 26

Développements limités

Prérequis
Il est nécessaire de connaître les développements (en 0) des fonctions usuelles, ainsi que la formule de Taylor-Young !

Avertissement : Les développements limités peuvent se donner au « sens faible » (avec les petits $\mathrm{o}(\cdot)$) ou « au sens fort » (avec les grands $\mathrm{O}(\cdot)$). Volontairement, aucune de ces deux formes n'est imposée. Mais, pour des raisons de concision, une seule d'entre elles est donnée dans les éléments de correction de chaque question.

Développements limités

Calcul 26.1 — Développements limités d'une somme ou d'un produit de fonctions.

Former le développement limité, à l'ordre indiqué et au voisinage de 0, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 4 : $f(x) = \sin(x) + 2\ln(1+x)$ ....

b) À l'ordre 4 : $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ ....

c) À l'ordre 6 : $\sin(x)(\mathrm{ch}(x)-1)$ ....

d) À l'ordre 6 : $\mathrm{e}^x \sin(x)$ ....

Calcul 26.2 — Développements limités d'une fonction composée.

Former le développement limité, à l'ordre et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 4, en 0 : $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ....

b) À l'ordre 6, en 0 : $\sqrt{\cos(x)}$ ....

c) À l'ordre 3, en 0 : $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}$ ....

d) À l'ordre 2, en 1 : $\dfrac{\ln(2-x)}{x^2}$ ....

Calcul 26.3 — Développements limités d'une fonction composée.

Former le développement limité, à l'ordre et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 2, en $\dfrac{\pi}{3}$: $\sin(\pi\cos(x))$ ....

b) À l'ordre 3, en $\dfrac{\pi}{4}$: $\tan(x)$ ....

c) À l'ordre 7, en $\dfrac{\pi}{2}$: $\cos(\pi\sin(x))$ ....

Développements asymptotiques

Calcul 26.4

Former le développement asymptotique, à la précision et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) À la précision x^2, en 0 : $\dfrac{1}{x(\mathrm{e}^x-1)} - \dfrac{1}{x^2}$ ....

b) À la précision $\dfrac{1}{x^5}$, en $+\infty$: $\dfrac{\sin(1/x)}{x+1}$ ....

c) À la précision $\dfrac{1}{x^3}$, en $+\infty$: $x\ln(x+1)-(x+1)\ln(x)$ ....

d) À la précision $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$, $+\infty$: $\left(\dfrac{1}{x}+1\right)^{x^2}$ ....

Réponses mélangées

$$-\frac{1}{2x}+\frac{1}{12}-\frac{1}{720}x^2+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2) \qquad 3x-x^2+\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{2}+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$$

$$1-x+\frac{3}{2}(x-1)^2+\underset{x\to 1}{\mathrm{o}}\left((x-1)^2\right) \qquad 1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\mathrm{O}}\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4\right)$$

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{5}{6x^4}-\frac{5}{6x^5}+\underset{x\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{x^6}\right) \qquad x+x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}-\frac{x^6}{90}+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^6) \qquad \frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{24}+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^6)$$

$$1-\frac{3\pi^2}{8}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\underset{x\to\frac{\pi}{3}}{\mathrm{o}}\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2\right) \qquad 1-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{96}x^4-\frac{19}{5760}x^6+\underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^7)$$

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\left(\mathrm{e}^x+\frac{\mathrm{e}^x}{3x}-\frac{7\mathrm{e}^x}{36x^2}\right)+\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\right) \qquad \mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}x}{2}+\frac{11\mathrm{e}x^2}{24}-\frac{7\mathrm{e}x^3}{16}+\frac{2447\mathrm{e}x^4}{5760}+\underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^5)$$

$$-1+\frac{\pi^2}{8}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4-\frac{\pi^2}{48}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^6+\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\mathrm{o}}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^7\right) \qquad \mathrm{e}\left(1+\mathrm{i}x-x^2-\frac{5}{6}\mathrm{i}x^3\right)+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$$

$$-\ln(x)+1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{4x^3}+\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^3}\right) \qquad x-\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{6}x^3-\frac{25}{12}x^4+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$$

Fiche de calcul n° 27

Algèbre linéaire

Prérequis
Coordonnées, Applications linéaires, Matrices, Rang.

Vecteurs

Calcul 27.1

Pour chacun des calculs suivants, déterminer les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$.

a) $u = (1,1)$, $\mathcal{B} = \big((0,1),(-1,2)\big)$. ....

b) $u = (1,1)$, $\mathcal{B} = \big((-1,2),(0,1)\big)$. ....

c) $u = (3,4)$, $\mathcal{B} = \big((1,2),(12,13)\big)$. ....

d) $u = (1,2,1)$, $\mathcal{B} = \big((0,1,3),(4,5,6),(-1,0,1)\big)$. ....

e) $u = (-1,0,1)$, $\mathcal{B} = \big((1,0,1),(1,1,1),(-1,-1,3)\big)$. ....

f) $u = X^3 + X^2$, $\mathcal{B} = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ ....

g) $u : x \mapsto \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\mathcal{B} = (x \mapsto \cos(x), x \mapsto \sin(x))$ ....

Calculs de rangs

Calcul 27.2 — Sans calcul.

Déterminer le rang des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 5 & 20 & 5 & 20 \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ ....

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 13 \end{pmatrix}$ ....

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. ....

f) $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ....

Calcul 27.3

Déterminer le rang des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ....

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ....

Matrices et Applications linéaires

Calcul 27.4 — Matrices d'endomorphismes.

Pour les applications linéaires f et les bases $\mathcal{B}$ suivantes, déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

a) $f : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y)$, $\mathcal{B} = \big((1, 0), (0, 1)\big)$. ....

b) $f : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y)$, $\mathcal{B} = \big((0, 1), (1, 0)\big)$. ....

c) $f : (x, y) \mapsto (2x + y, x - y)$, $\mathcal{B} = \big((1, 2), (3, 4)\big)$ ....

d) $f : (x, y, z) \mapsto (x + y, 3x - z, y)$, $\mathcal{B} = \big((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\big)$ ....

e) $f : P \mapsto P(X + 2)$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ ....

Calcul 27.5 — Matrices d'applications linéaires.

Pour les applications linéaires f et les bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ suivantes, déterminer la matrice de f de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

a) $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y)$, $\mathcal{B} = \big((0, 1, 3), (4, 5, 6), (-1, 0, 1)\big)$, $\mathcal{B}' = \big((0, 1), (1, 0)\big)$.

b) $f : P \mapsto P'$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$, $\mathcal{B}' = (1, X, X^2, X^3)$. ....

Réponses mélangées

$(-1, 3)$ $(-2, 4/5, 11/5)$ $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix}$ 2 2 $(3, -1)$ 1 $(1/2, -\sqrt{3}/2)$

4 $(9/11, 2/11)$ 2 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

$(0, 2, 4, 1)$ 1 1 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2 3 $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -19 & -43 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}$ 2 $(-1, 1/2, 1/2)$

Fiche de calcul n° 28

Séries numériques

Prérequis
Séries usuelles (convergence et sommes), décomposition en éléments simples.

Séries géométriques, exponentielles, de Riemann

Dans les calculs de cette section, reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

Calcul 28.1 — Séries géométriques.

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} 2^k$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2^k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 10} \frac{1}{3^k}$ ....

Calcul 28.2 — Séries exponentielles.

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{2^k}{k!}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2^k \times k!}$ ....

Calcul 28.3 — Séries de Riemann.

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 3} \frac{1}{\sqrt{k}}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 6} \frac{1}{k}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 3} \frac{\mathrm{i}^k}{7^{k-1}}$ ....

e) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 4} \frac{1}{(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^k}$ ....

Séries télescopiques

Calcul 28.4

Prouver la convergence et calculer la somme de chacune des séries suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2+k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^3+3k^2+2k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \ln\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right)$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \arctan\left(\frac{(k+2)-(k+1)}{1+(k+2)(k+1)}\right)$ ...

Séries géométriques dérivées

Prérequis
On pourra utiliser le fait que si $\alpha \in]-1,1[$, les séries

$$\sum_{k\geqslant 1} k\alpha^{k-1} \quad \text{et} \quad \sum_{k\geqslant 2} k(k-1)\alpha^{k-2},$$

appelées *séries géométriques dérivées*, convergent et ont pour somme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha^{k-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\alpha^{k-2} = \frac{2}{(1-\alpha)^3}.$$

Calcul 28.5 — Séries géométriques dérivées.

Reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{2^{2k}}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \mathrm{e}^{-(k-1)}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k2^k$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} k\frac{1}{2^{k-1}}$ ....

Calcul 28.6 — Séries géométriques dérivées – bis.

Reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k2^{-k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} (3k+1)\frac{1}{3^k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k(k-1)\frac{1}{2^{k-2}}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} k(k-1)\mathrm{e}^{-(k-2)}$ ....

Réponses mélangées

$\frac{\pi^2}{6}$ e $\frac{-2-5\sqrt{2}i}{54}$ $\frac{11}{4}$ 16 2 2 $\frac{2\mathrm{e}^3}{(\mathrm{e}-1)^3}$ $\frac{1}{4}$

divergente 4 divergente $\frac{1}{2\times 3^9}$ 1 $\frac{1}{12}$ $\frac{\pi}{4}$ e^2-3

divergente $\frac{7-49i}{35\sqrt{2}}$ $\ln(2)$ $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ $\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$ $\frac{2}{2-\sqrt{2}}$ divergente

Fiche de calcul n° 29

Déterminants

Prérequis
Nombres complexes.

Calculs en dimension deux

Calcul 29.1

Soit a un nombre réel.

Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} -a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 3 \\ -2\mathrm{i} & 5\mathrm{i} \end{pmatrix}$ ....

d) $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ ....

Calcul 29.2

Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} 3/2 & 7/2 \\ 5/2 & 9/2 \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} \ln(2) & \ln(8) \\ -2 & \ln(e^3) \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/7 \\ 5/9 & 7/8 \end{pmatrix}$ ....

d) $\begin{pmatrix} 85 & 72 \\ 53 & 91 \end{pmatrix}$ ....

e) $\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 1-\sqrt{32} \\ 2+\sqrt{8} & 3-\sqrt{8} \end{pmatrix}$ ....

Calculs en dimension trois

Calcul 29.3

Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes.

On rappelle que le nombre complexe j vérifie $\mathrm{j}^3 = 1$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{j} & \mathrm{j} \\ \mathrm{j} & -\mathrm{j}^2 & 1 \\ -\mathrm{j}^2 & 1 & \mathrm{j}^2 \end{pmatrix}$ ....

Calcul 29.4

Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} \mathrm{j} & -\mathrm{j} & \mathrm{j} \\ -\mathrm{j} & \mathrm{j} & \mathrm{j} \\ \mathrm{j} & \mathrm{j} & -\mathrm{j} \end{pmatrix}$ .... $\boxed{}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2+\mathrm{i} & -2+\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2\mathrm{i}-1 & 1-2\mathrm{i} \\ -1 & \mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}$ .... $\boxed{}$

c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{15} & 0 & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{3} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$ .... $\boxed{}$

Calcul 29.5

Soit x, y et z des nombres réels et a un nombre réel strictement positif.

Calculer le déterminant de chacune des matrices d'ordre trois suivantes.

a) $\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$ .... $\boxed{}$

b) $\begin{pmatrix} \ln(a) & \ln(a^2) & -2\ln(a) \\ \ln(\sqrt{a}) & -2\ln(a) & \ln(a^2) \\ -\ln(a^2) & \ln(a) & 2\ln(\sqrt{a}) \end{pmatrix}$ .... $\boxed{}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}$ .... $\boxed{}$

d) $\begin{pmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+1 & x+2 & x+3 \\ x+2 & x+3 & x+4 \end{pmatrix}$ .... $\boxed{}$

Réponses mélangées

0 $\quad -4$ $\quad 6\mathrm{i}-12$ $\quad -6\ln^3(a)$ $\quad 7\sqrt{2}+13$ $\quad 6$ $\quad 227/336$

0 $\quad 9\ln(2)$ $\quad 4/375$ $\quad (y-x)(z-y)(z-x)$ $\quad 20$ $\quad -5+6\mathrm{i}$

$3\ 919$ $\quad 0$ $\quad -2a^2$ $\quad -2$ $\quad -40$ $\quad x^3+y^3+z^3-3xyz$

Fiche de calcul n° 30

Structures euclidiennes

Prérequis
Produit scalaire, famille orthogonale, base orthonormée.

Calcul de produits scalaires

Calcul 30.1 — Des calculs de produits scalaires de fonctions.

Calculer les produits scalaires entre les vecteurs suivants dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ muni du produit scalaire défini par

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On note $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ les éléments de E suivants :

$$f_1 : t \longmapsto \ln(1+t), \qquad f_2 : t \longmapsto t^2, \qquad f_3 : t \longmapsto \cos t,$$
$$f_4 : t \longmapsto e^t, \qquad f_5 : t \longmapsto 1+t, \qquad f_6 : t \longmapsto 2.$$

a) $\langle f_1, f_6\rangle$ ....

b) $\langle f_2, f_5\rangle$ ....

c) $\langle f_3, f_5\rangle$ ....

d) $\langle f_4, f_4\rangle$ ....

Calcul 30.2 — Des calculs de produits scalaires de matrices.

Calculer les produits scalaires suivants dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

On notera $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

a) $\langle A, B\rangle$ ....

b) $\langle B, B\rangle$ ....

c) $\langle B, C\rangle$ ....

Distances euclidiennes

Calcul 30.3 — Des calculs de distances.

On se place dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire défini par $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Calculer la distance de X^2 à $\mathrm{Vect}(1, X)$ ....

b) Calculer la distance de X à $\mathrm{Vect}(1, X^3)$ ....

c) Calculer la distance de $1+X^2$ à $\mathrm{Vect}(X, X^2)$ ....

Orthonormalisation

Calcul 30.4 — Orthonormalisation de Gram-Schmidt.

On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire défini par $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

En appliquant le processus de Gram-Schmidt :

a) calculer une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(1, X)$ ....

b) calculer une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(X, X^2+1)$ ....

Matrices de projections orthogonales et de symétries orthogonales

Calcul 30.5 — Calculs de matrices.

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, qu'on munit d'une base orthonormale $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
On note x, y et z les coordonnées dans cette base.
Pour chacune des applications linéaires suivantes, écrire sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

a) La projection orthogonale sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$ ....

b) La projection orthogonale sur la droite D dirigée par $i + 2k$ ....

c) La symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x + 3y - z = 0$ ....

Réponses mélangées

$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad 0 \quad$ $2\sin(1) + \cos(1) - 1$ $\quad$ $\frac{1}{2}(e^2 - 1)$ $\quad$ $4\ln(2) - 2$

$\left(1, 2\sqrt{3}\left(X - \frac{1}{2}\right)\right)$ $\quad$ $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & -6 & 2 \\ -6 & -7 & 6 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\left(\sqrt{3}X, \sqrt{\frac{240}{43}}\left(X^2 - \frac{9}{4}X + 1\right)\right)$

$10 \quad \frac{1}{3} \quad 11 \quad \frac{1}{6\sqrt{5}} \quad \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{5\sqrt{3}} \quad \frac{7}{12}$

Fiche de calcul n° 31

Fonctions de deux variables

Prérequis

Fonctions d'une variable réelle (limites, continuité, dérivabilité)

Les fondamentaux

Calcul 31.1 — Ensembles de définition.

Déterminer le plus grand ensemble de définition possible de chacune des fonctions suivantes.

a) $(x, y) \longmapsto \operatorname{Arcsin}|x-y|$ ....

b) $(x, y) \longmapsto \ln(x) + \sqrt{y}$ ....

c) $(x, y) \longmapsto \dfrac{x\sqrt{y}}{x^2+y^2}$ ....

d) $(x, y) \longmapsto \sqrt{16-x^2-y^2}\ln\left(x^2+y^2-16\right)$ ....

Calcul 31.2 — Dérivation partielle.

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

a) $f : (x, y) \longmapsto x^2 + y^5 + xy + \pi$ ....

b) $f : (x, y) \longmapsto \sin(2xy - y)$ ....

c) $f : (x, y) \longmapsto (x^2y, x^2 - y^2)$ ....

d) $f : (x, y) \longmapsto \operatorname{Arctan}(2x + y)$ ....

Calcul 31.3

Même exercice.

a) $f : (x, y) \longmapsto \cos(x - y)$ ....

b) $f : (x, y) \longmapsto x\cos(e^{xy})$ ....

c) $f : (x, y) \longmapsto x^y$ ....

d) $f : (x, y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ....

Composition de fonctions

Calcul 31.4 — Règle de la chaîne.

On note $w(t) = f(u(t), v(t))$. Calculer $w'(t)$ pour chacune des fonctions f, u, v définies ci-dessous.

a) $f(x,y) = 4x^2 + 3y^2$ avec $\begin{cases} u = \sin \\ v = \cos \end{cases}$ ....

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ avec $\begin{cases} u(t) = \mathrm{e}^{2t} \\ v(t) = \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$ ....

c) $f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2$ avec $\begin{cases} u(t) = 3\sin(2t) \\ v(t) = 4\cos(2t) \end{cases}$ ....

Calcul 31.5 — Changements de variables.

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}^*$.
Exprimer les dérivées partielles de $f \circ \varphi$ selon celles de f pour les fonctions suivantes.

a) $\varphi : (u,v) \mapsto \left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{v-u}{2c} \right)$ ....

b) $\varphi : (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ ....

Réponses mélangées

$$]0,+\infty[\times [0,+\infty[\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{1+(2x+y)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+(2x+y)^2}$$

$$\varnothing \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\,x^{y-1} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \ln x \qquad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geqslant 0\} \backslash \{(0,0)\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x-1 \leqslant y \leqslant x+1\} \qquad \frac{2\mathrm{e}^{4t} + \mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{\mathrm{e}^{4t} - \mathrm{e}^{-2t}}}$$

$$\frac{\partial (f\circ\varphi)}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \qquad \sin(2t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\frac{\partial (f\circ\varphi)}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2xy, 2x) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^2, -2y)$$

$$\frac{\partial (f\circ\varphi)}{\partial v}(u,v) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c}\right) + \frac{1}{2c}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(\mathrm{e}^{xy}) - xy\sin(\mathrm{e}^{xy})\,\mathrm{e}^{xy} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x^2\sin(\mathrm{e}^{xy})\,\mathrm{e}^{xy}$$

$$\frac{\partial (f\circ\varphi)}{\partial u}(u,v) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c}\right) - \frac{1}{2c}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c}\right)$$

$$-72\cos(4t) - 46\sin(4t) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin(x-y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin(x-y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2y\cos(2xy-y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2x-1)\cos(2xy-y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 5y^4 + x$$