Interrogation finale du 1^er^ semestre

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Durée : 1h.

L'usage de la calculatrice est interdit

1. Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

2. Résoudre l'équation $z^3 + 27 = 0$ d'inconnue complexe z.

3. Montrer que la composée de deux fonctions injectives est injective .

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$.

5. Résoudre $|x-5| < |x-1|$ d'inconnue réelle x.

6. On note $f : x \mapsto \ln(1+\mathbf{e}^x)$. Montrer que f est bijective et déterminer $D_{f^{-1}}$.

7. Étude complète de Arcsin.

8. Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^x}{1+\mathbf{e}^{2x}}$.

9. Résoudre $(E) : (1+x^2)y' + xy = \sqrt{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

10. Déterminer une expression explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer AB est inversible et déterminer son inverse.

12. Déterminer l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)^2 = f(x)$.

13. Étudier, via l'IAF, la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n+1}{u_n+2}$.