Devoir surveillé $n°9$ du mardi 10 juin 2025

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Durée : 1h.

L'usage de la calculatrice est interdit

Exercice I :

On considère l'application $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} (0,0) & \text{si} \quad t \in]-1,0] \\ \left(t^2 \sin \frac{1}{t}, t^2 \cos \frac{1}{t}\right) & \text{si} \quad t \in]0,1[\end{cases}$$

On note pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

1. Démontrer que f est dérivable en 0 puis sur l'intervalle $]-1,1[$.
   Préciser le vecteur $f'(t)$ pour tout $t \in]-1,0]$ et pour tout $t \in]0,1[$.
2. Calculer $\|f'(t)\|^2$ pour tout $t \in]0,1[$.
3. Montrer que l'ensemble $\{\|f'(t)\|, t \in]-1,1[\}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice II :

On pose pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (2-x-y)^2 + (1-x)^2 + (1-2x-y)^2$.
On se propose de déterminer le réel $\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$ par deux méthodes différentes.

Méthode A :

1. Montrer que si la fonction f admet un extremum local sur $\mathbb{R}^2$ alors celui-ci est atteint en $\left(\frac{1}{3},1\right)$.
2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Posons $u = x - \frac{1}{3}$ et $v = y-1$. Montrer que $f(u,v) = 6u^2 + 6uv + 2v^2 + \frac{4}{3}$.
3. En déduire que f est minoré par $\frac{4}{3}$.
4. Conclure.

Méthode B :

Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire $\langle . | . \rangle$ canonique. On notera $\|.\|$ la norme associée.
On note également $a = (2,1,1), u = (1,1,2), v = (1,0,1)$ et $F = \text{Vect}(u,v)$.

1. Considérons l'application linéaire g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = (x+y, x, 2x+y)$$

   Montrer que $\text{Im}(g) = F$ puis calculer $\|a - g(x,y)\|^2$ pour tout $x,y \in \mathbb{R}$.
2. Exprimer alors $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$ en fonction de a et F.
3. On note b le projeté orthogonal du vecteur a sur le sous-espace vectoriel F.
   Donner directement la formule qui exprime $d(a,F)$ en fonction de a et b.
4. Justifier que $\langle a-b \mid u \rangle = \langle a-b \mid v \rangle = 0$ et en déduire le vecteur b.
5. Conclure.