Devoir surveillé $n°8$ du mardi 13 juin 2023

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Le sujet est composé de trois problèmes indépendants. Durée : 3h.

L'usage de la calculatrice est interdit

Problème I : Variables aléatoires

Pour fêter sa retraite, un professeur envoie des invitations à ses $n \in \mathbb{N}^*$ anciens élèves. Chaque ancien élève lui répond avec une probabilité $p \in]0,1[$. Il fait un deuxième envoi à ceux qui n'ont pas répondu la première fois.

1. Soit Y le nombre de réponses au premier envoi et Z le nombre de réponses au deuxième envoi.
   (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Donner l'espérance et la variance de Y.
   (c) Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, déterminer la loi conditionnelle de Z sachant $(Y=i)$.
2. Soit $X = Y + Z$ le nombre total de réponses.
   (a) Écrire les évènements $(X=0)$ et $(X=1)$ en fonction d'évènements liés aux variables aléatoires Y et Z. En déduire les valeurs de $P(X=0)$ et $P(X=1)$.
   (b) *Question préliminaire :* Montrer que, pour tout $(i,k,n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $0 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$,
   $$\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = \binom{n}{k}\binom{k}{i}.$$
   (c) Déterminer la loi de X.
   (d) Déterminer l'espérance de X.
   (e) Déterminer la variance de X.

Problème II : Espaces préhilbertiens

Dans cet exercice, on considère **la structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel** sur $E = \mathbb{C}^2$.
On munit E du produit scalaire défini, pour tous $Z = (z_1, z_2)$ et $Z' = (z'_1, z'_2)$ dans E, par :

$$(Z \mid Z') = \mathfrak{Re}\left(\overline{z_1}z'_1 + \overline{z_2}z'_2\right).$$

1. Déterminer la dimension de E.
2. Vérifier que $(\cdot \mid \cdot)$ est un produit scalaire sur E.
3. Soit $Z = (z_1, z_2) \in E$. Exprimer la norme de Z en fonction de $|z_1|$ et $|z_2|$.
4. Soit $\mathscr{B} = (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)$, avec $Z_1 = (1,0)$, $Z_2 = (\mathbf{i}, 0)$, $Z_3 = (0,1)$ et $Z_4 = (0, \mathbf{i})$.
   Montrer que la famille $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E.
5. On pose : $F = \{(z_1, z_2) \in E \ / \ \mathfrak{Re}(z_1 + z_2) = 0\}$.
   Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, et déterminer sa dimension.
6. Déterminer $F^\perp$.
7. Soit p la projection orthogonale sur F. Calculer la matrice de p dans la base $\mathscr{B}$.
8. Soit $Z = (\mathbf{j}, \mathbf{j}^2)$. Calculer la distance de Z à F.

Problème III : Fonctions de deux variables (CCINP PSI 2021)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence d'extremums pour f.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Expliciter des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0,0)$, tels que $f(x,y) < 0$.
   Expliciter de même des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0,0)$, tels que $f(x,y) > 0$.
   La fonction f admet-elle en $(0,0)$ un maximum local, un minimum local ou aucun des deux ?

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$: $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u,v) = f(1+u, 1+v) - f(1,1)$.

3. Calculer, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u,v)$ puis, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $g(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
4. Prouver que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $g(r\cos\theta, r\sin\theta) \geq 3r^2\left(\frac{1}{2} - 2r\right)$.
   Que peut-on en conclure ?
5. La fonction f possède-t-elle un ou des extremums globaux ?