Devoir surveillé $n°8$ du <u>mardi 6 mai 2025</u>

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Durée : 1h30.

L'usage de la calculatrice est interdit

Paradoxe de Penney (1969)

On considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée, c'est-à-dire pour laquelle, à chaque lancer, les apparitions de « pile » et de « face » sont équiprobables. Les lancers sont effectués de manière indépendante.
Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par P_n l'évènement « pile apparaît au lancer de rang n » et par F_n l'évènement « face apparaît au lancer de rang n ». Pour tout entier n supérieur à 3, on note :

$$B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n, \quad \text{et} \quad U_n = \bigcup_{i=3}^{n} B_i.$$

On définit aussi, pour tout entier n supérieur à 3, $u_n = P(U_n)$.

1. Pour $n \in [\![3, +\infty[\![$, expliciter clairement et en français les évènements B_n et U_n .
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante et convergente.
3. Calculer, pour tout entier n supérieur à 3, la probabilité de l'évènement B_n.
4. Pour $n \in [\![3, +\infty[\![$, vérifier que les évènements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles. Les évènements B_n et B_{n+3} sont-ils incompatibles ?
5. En déduire les valeurs de u_3, u_4 et u_5.
6. Soit $n \in [\![5, +\infty[\![$.
   (a) Justifier l'égalité des évènements $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$ et préciser leur probabilité en fonction de u_{n-2}.
   (b) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et B_{n+1}. En déduire l'égalité : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.
   (c) En déduire la limite de (u_n) et interpréter ce résultat.

On admettra qu'on obtient le même résultat avec la séquence « face, pile, pile ».

Deux joueurs J et J' s'affrontent maintenant dans un jeu utilisant la même expérience aléatoire que précédemment avec les règles suivantes :

- ⋆ le joueur J est gagnant si la configuration « pile, pile, face » apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration « face, pile, pile » n'apparaisse ;
- ⋆ le joueur J' est gagnant si la configuration « face, pile, pile » apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration « pile, pile, face » n'apparaisse ;

On se propose de démontrer que, dans ce jeu, le joueur J' possède un net avantage sur le joueur J.

7. Pour tout entier n supérieur à 3, on note G_n l'évènement « le joueur J est déclaré gagnant à l'issue du lancer de rang n » et g_n la probabilité de G_n.
   (a) Calculer g_3 et g_4 et établir, pour tout $n \in [\![3, +\infty[\![$, l'égalité suivante : $g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   (b) En déduire la probabilité h_n pour que le joueur J soit déclaré gagnant avant le lancer de rang $n + 1$.
   (c) Déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n$. Interpréter ce résultat.

Dans un programme Python, l'instruction `r = randint(0,1)` a pour effet de donner aléatoirement à la variable `r` la valeur 0 ou 1, ces deux valeurs étant équiprobables.
On considère la procédure Python suivante :

```python
def Quigagne():
    x = 0
    y = 0
    k = 0
    while x < 3 and y < 3:
        k = k + 1
        r = randint(0,1)
        if r == 1:
            if x >= 1:
                x = 2
            else:
                x = 1
            if y >= 1:
                y = y + 1
        else:
            if x == 2:
                x = 3
            else:
                x = 0
                y = 1
    if x == 3:
        print("...")
    else:
        print("...")
```

8. (a) Que représente la dernière valeur prise dans la procédure par la variable k et quels textes pourrait-on substituer aux pointillés de la dernière instruction ?
   (b) Donner sous forme d'un tableau les valeurs successives prises par les variables x, y et k lors de l'exécution de cette procédure, si les valeurs données à la variable `r` par l'instruction `randint(0,1)` sont successivement :
   ⋆ 1, 1, 1, 1, 0
   ⋆ 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1
   ⋆ 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1
   (c) Qu'afficherait l'ordinateur dans les trois exemples de la question précédente ?