Devoir surveillé $n°7$ du vendredi 7 avril 2023

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Le sujet est composé de deux problèmes indépendants. Durée : 4h.

L'usage de la calculatrice est interdit

Problème I : Formule de Stirling

Le but de ce problème est de démontrer la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n\, \mathbf{e}^{-n}$$

Partie A : Équivalent de $n!$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln\left(\dfrac{n^n\,\mathbf{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!}\right)$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = -1 + \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.
2. En déduire que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$.
3. Montrer que la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge, en déduire la nature de la suite (u_n).
4. Démontrer qu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}_+^*$, nommée *constante de Stirling*, tel que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} K\, n^n\, e^{-n}\sqrt{n}.$$

Partie B : Intégrale de Wallis

On définit la suite des intégrales de Wallis $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.

5. *Une relation de récurrence.*
   (a) Calculer W_0 et W_1.
   (b) Justifier que (W_n) est une suite de réels strictement positifs.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} W_{n-1}$.
6. *Équivalent.*
   (a) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_n = nW_{n-1}W_n$.
   Montrer que (u_n) est une suite constante et en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_{n-1}W_n = \dfrac{\pi}{2n}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}$. En déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n-1}$.
   (c) Montrer alors que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
7. *Expression explicite des termes pairs et calcul de la constante de Stirling.*
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} W_0$.
   (b) En déduire que $W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{K\sqrt{2n}}$ où K est la constante de Stirling.
   (c) Conclure en donnant la valeur exacte de K.

Problème II : Interpolation de Hermite

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f \in \mathscr{D}([a,b],\mathbb{R})$.

Partie A : Polynôme d'interpolation de Hermite

On considère l'application :

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ & P & \mapsto & (P(a), P'(a), P(b), P'(b)) \end{array}$$

1. Démontrer que Φ est un isomorphisme.
2. En déduire qu'il existe un unique polynôme $H \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $H(a) = f(a)$, $H'(a) = f'(a)$, $H(b) = f(b)$, $H'(b) = f'(b)$. *Ce polynôme est le polynôme d'interpolation de Hermite de f sur $[a,b]$.*

Partie B : Intégrale du polynôme d'interpolation de Hermite

On introduit l'application

$$\begin{array}{cccc} \Psi : & \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R} \\ & P & \mapsto & \displaystyle\int_a^b P(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

On note $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_4$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^4$. Pour tout $k \in [\![0,3]\!]$, on pose $P_k = (X-a)^k$ puis $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$. Pour simplifier les écritures, on notera $\delta = b - a$.

3. Démontrer que la famille $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
4. Déterminer la représentation matricielle de l'application linéaire Φ relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{E}_4$. On notera A cette matrice. Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta} & \frac{3}{\delta^2} & -\frac{1}{\delta} \\ \frac{2}{\delta^3} & \frac{1}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta^3} & \frac{1}{\delta^2} \end{pmatrix}$.
5. Justifier que l'application Ψ est linéaire et déterminer sa représentation matricielle relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{E}_1$. On notera B cette matrice.
6. Exprimer $\displaystyle\int_a^b H(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de Ψ, Φ et d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^4$ à préciser.
7. En déduire, via une opération matricielle, que $\displaystyle\int_a^b H(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\delta}{2}(f(a)+f(b)) + \frac{\delta^2}{12}(f'(a)-f'(b))$.

Partie C : Contrôle de l'erreur commise sur l'intégrale

On suppose à présent que f est de classe $\mathscr{C}^4$.

8. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$, tel que $\forall t \in [a,b]$, $|f^{(4)}(t)| \leqslant M$.
9. On note h la fonction polynomiale d'interpolation de Hermite de f sur $[a,b]$. On pose $d = f - h$.
   (a) Justifier que d est de classe $\mathscr{C}^4$ sur $[a,b]$ et que $d^{(4)} = f^{(4)}$.
   (b) Démontrer que d' s'annule en trois points distincts sur $[a,b]$ puis que $d^{(3)}$ s'annule sur $[a,b]$.
   (c) *Lemme.* Soit $g \in \mathscr{D}([a,b],\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = 0$ et $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \in [a,b]$, $|g'(t)| \leqslant K$. Alors, $\forall t \in [a,b]$, $|g(t)| \leqslant K(b-a)$.
   (d) En déduire que $\forall t \in [a,b]$, $|d(t)| \leqslant M(b-a)^4$.
10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $s = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ la subdivision régulière du segment $[a,b]$.
    Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose h_k la fonction polynomiale d'interpolation de Hermite de f sur le segment $[t_k, t_{k+1}]$. Dorénavant, on réemploie la lettre h pour définir la fonction définie sur $[a,b]$ par $h(b) = f(b)$ et dont la restriction sur $[t_k, t_{k+1}[$ est égale à h_k pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.
    (a) Montrer que la fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.
    (b) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Donner une majoration de $\left|\displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) - h_k(t)\,\mathrm{d}t\right|$ dépendant de M, a, b et n.
    (c) Montrer que $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{M(b-a)^5}{n^4}$.
11. Écrire une fonction python basée sur l'interpolation de Hermite permettant d'obtenir une approximation de π. *On pourra s'intéresser à l'intégrale de la fonction $t \mapsto \frac{2}{1+t^2}$ entre -1 et 1.*