Devoir surveillé $n°7$ du samedi 5 avril 2025

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Le sujet est composé de 3 problèmes indépendants. Durée : 2h.

L'usage de la calculatrice est interdit

Problème I : somme d'une série alternée

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

1. (a) Calculer u_0.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2n+1}$.
2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n + u_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_{n+1}.$$
   (c) Montrer que la série de terme général v_n converge et calculer sa somme.
   (d) La série de terme général v_n est-elle absolument convergente ?

Problème II : cas particulier d'une interpolation d'Hermite

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application suivante :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ P & \longmapsto & (P(0), P'(0), P(\alpha), P'(\alpha)) \end{array}$$

1. Montrer que φ est une application linéaire.
2. Déterminer la matrice de φ dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ où $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ désignent les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}_3[X]$ et de $\mathbb{R}^4$. On notera $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\varphi)$ cette matrice.
3. Déterminer le déterminant de la matrice M.
4. En déduire les valeurs de α pour lesquelles φ est un isomorphisme.
5. Notons $\mathscr{F}$ la famille de $\mathbb{R}_3[X]$ suivante :
   $$\mathscr{F} = ((2X+\alpha)(X-\alpha)^2, \alpha X(X-\alpha)^2, (3\alpha - 2X)X^2, \alpha(X-\alpha)X^2)$$
   (a) Expliciter la matrice de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$. On notera P cette matrice.
   (b) Calculer le déterminant de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$.
   (c) En déduire les valeurs de α pour lesquelles la famille $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
   On se place dans ces cas de sorte que $\mathscr{F}$ soit une base de $\mathbb{R}_3[X]$ jusqu'à la fin du problème.
   (d) Calculer la matrice de φ dans les bases $\mathscr{F}$ et $\mathscr{C}$. On notera $M_{\mathscr{F}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{F},\mathscr{C}}(\varphi)$ cette matrice.
   (e) Sans calculs, exprimer $M_{\mathscr{F}}$ en fonction de M et P puis vérifier cette relation par le calcul.
   (f) En déduire une expression explicite de la bijection réciproque de φ.
   (g) Application : déterminer, à l'aide de la question précédente, l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(0) = P'(0) = 1$ et $P(1) = P'(1) = 0$.

Problème III : séries de Bertrand

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On considère la série de Bertrand $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

On se propose d'étudier la nature de cette série en fonction des paramètres α et β.

1. Pour $\alpha > 1$, montrer que $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right)$. Conclure quand à la nature de la série dans ce cas.
2. Pour $\alpha < 1$, montrer que $\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}} = o\left(\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}\right)$. Conclure quand à la nature de la série dans ce cas.
3. On suppose à présent que $\alpha = 1$.
   (a) À l'aide d'une comparaison série-intégrale, prouver que la série est divergente lorsque $\beta = 1$.
   (b) En déduire la nature de la série pour $\beta < 1$.
   (c) À l'aide d'une nouvelle comparaison série-intégrale, prouver que la série est convergente si $\beta > 1$.