Devoir surveillé $n°6$ du <u>samedi 8 mars 2025</u>

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Le sujet est composé de 3 problèmes indépendants. Durée : 2h.

L'usage de la calculatrice est interdit

Problème I : deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_4[X]$

L'objet du problème est entre autre l'étude des deux sous-ensembles suivants du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_4[X]$:

$$F = \left\{\alpha X^4 + (\alpha+\beta)X + \beta \mid (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\} \quad \text{et} \quad G = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P'(1) = 0\}.$$

1. *Propriétés de F.*
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
   (b) Déterminer une base de F. En déduire $\dim(F)$.
2. *Propriétés de G.*
   (a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
   (b) Sans déterminer une base de G, justifier que $\dim(G) \leqslant 4$.
   (c) Montrer que la famille $(1, (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4)$ est une famille libre de polynômes de G.
   (d) En déduire que $G = \mathrm{Vect}(1, (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4)$.
3. *Propriétés de $F+G$.*
   (a) Exprimer $F+G$ comme un sous-espace vectoriel engendré.
   (b) En déduire que $F+G = \mathbb{R}_4[X]$.
4. *Propriétés de $F \cap G$.*
   (a) Rappeler la formule liant $\dim(F)$, $\dim(G)$, $\dim(F+G)$ et $\dim(F\cap G)$.
   En déduire $\dim(F\cap G)$.
   (b) Déterminer une base de $F \cap G$.

Problème II : une asymptote affine

Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. Déterminer un équivalent simple de f au voisinage de $+\infty$.
2. Montrer que la courbe représentative de f, notée $\mathscr{C}_f$, admet une asymptote affine au voisinage de $+\infty$. On notera par la suite D cette asymptote.
3. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à D au voisinage de $+\infty$.

Problème III : dérivation discrète dans $\mathbb{K}[X]$

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on note $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
   (a) On suppose que P est un polynôme constant : déterminer $\Delta(P)$.
   (b) On suppose que $\deg(P) \geqslant 1$: vérifier que $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Δ_n la restriction de Δ à $\mathbb{K}_n[X]$.
   (a) Justifier que Δ_n est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.
   (b) Déterminer le noyau de Δ_n.
   (c) A l'aide du théorème du rang, calculer $\dim(\mathrm{Im}(\Delta_n))$.
   (d) En déduire que $\mathrm{Im}(\Delta_n) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
4. À l'aide de la question précédente, montrer que Δ est surjectif.
5. L'endomorphisme Δ est-il injectif ?