Devoir surveillé $n°6$ du vendredi 24 mars 2023

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Le sujet est composé de quatre parties indépendantes ; néanmoins, la partie C est utile pour la dernière question de la partie D. Dans tout le sujet, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Durée : 2h.

L'usage de la calculatrice est interdit

Partie A

On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (6x-4y, 9x-6y) \end{array}$$

1. Démontrer que l'application f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.
   (b) En déduire que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$ puis que $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)}$.

On pose maintenant

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{22} \cdot (2y, -x) \end{array}$$

C'est une application linéaire, on ne demande pas de le vérifier.

3. Démontrer que g est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.
4. (a) On pose $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$. Calculer $(f \circ g + g \circ f)(e_1)$ et $(f \circ g + g \circ f)(e_2)$.
   (b) En déduire que $f \circ g + g \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$.

Partie B

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que

$$\begin{array}{ll} (1) & f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \\ (2) & f \circ g + g \circ f = id_E \end{array}$$

1. (a) Démontrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
   (b) Démontrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)$.
   (c) Conclure. Puis démontrer que n est pair.
2. Démontrer que $f \circ g \circ f = f$ puis que $f \circ g$ est un projecteur.

On pose $F = \mathrm{Im}(f)$ puis $G = g(F)$.

3. Démontrer que $F = \mathrm{Im}(f \circ g)$ et que $G = \mathrm{Ker}(f \circ g)$.
4. En déduire que F et G sont supplémentaires dans E.

Partie C

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $2m$ où $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang m tel que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. (a) Quelles sont les dimensions du noyau et de l'image de f ?
   (b) Démontrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

On pose $F = \mathrm{Ker}(f)$ et soit G un supplémentaire de F dans E.

2. Quelle est la dimension de G ?

On introduit l'application linéaire

$$h : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

3. (a) Montrer que l'application h est bien définie et qu'elle est linéaire.
   (b) Démontrer que $\mathrm{Ker}(h) = \{0_E\}$.
   (c) Démontrer que h est un isomorphisme.

Posons g l'endomorphisme de E défini par $g_{|F} = h^{-1}$ et $g_{|G} = 0_{\mathscr{L}(G)}$.

4. Démontrer que $f \circ g + g \circ f = id_E$.

Partie D

On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_5[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_5[X] \\ P & \longmapsto & P''' \end{array}$$

1. (a) Sans justifier, donner une base de $\mathbb{R}_5[X]$ et sa dimension.
   (b) Justifier que f est linéaire et simplifier $f \circ f$.
   (c) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ puis calculer le rang de f.

On pose $F = \mathrm{Ker}(f)$ et $G = \mathrm{Vect}(X^3, X^4, X^5)$.

2. Justifier que G est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_5[X]$.
3. Montrer qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}_5[X]$ tel que $f \circ g + g \circ f = id_{\mathbb{R}_5[X]}$.
   Exprimer, pour tout $P \in \mathbb{R}_5[X]$, $g(P)$ en fonction des dérivées successives de P évaluées en 0.