Devoir surveillé $n°5$ du samedi 11 février 2023

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Le sujet est composé de 2 problèmes indépendants. Durée : 2h.

L'usage de la calculatrice est interdit

Problème I : étude d'une suite définie par récurrence

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

1. (a) Déterminer le domaine de définition D de f.
   (b) Justifier que f est continue sur D et prolongeable par continuité en 0.
   On notera par la suite encore f ce prolongement sur $D \cup \{0\}$.
   (c) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D$.
   (d) Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ en 0 et déterminer $f'(0)$.
2. (a) Étudier les variations de $h : x \mapsto \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$. En déduire que f est strictement décroissante.
   (b) Déterminer les limites éventuelles de f aux bords du domaine $D \cup \{0\}$.
   (c) On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f et T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   Déterminer la position relative de T par rapport à $\mathscr{C}_f$.
   (d) Tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$ en mettant en évidence toutes les informations prouvées ci-dessus.
3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   (b) Montrer que f admet un unique point fixe α (c'est-à-dire tel que $f(\alpha) = \alpha$), et que $\alpha \in]0,1[$.
   (c) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.
   (d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
   (e) On choisit $u_0 = 1$. Déterminer N tel que : $\forall n \geqslant N,\ |u_n - \alpha| \leqslant 10^{-30}$.

Problème II : Liberté de trois fonctions exponentielles

On considère trois fonctions : $f : x \mapsto \mathbf{e}^x$, $g : x \mapsto \mathbf{e}^{2x}$ et $h : x \mapsto \mathbf{e}^{x^2}$ de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Le but de ce problème est de montrer que la famille (f, g, h) est libre par quatre méthodes différentes.
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $af + bg + ch = 0_{\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. On notera φ la fonction $af + bg + ch$.

1. Évaluer φ en 0, 1 et 2 puis conclure.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de φ en 0 puis conclure.
3. Étudier successivement les limites de φ et $\frac{\varphi}{f}$ en $-\infty$ puis conclure.
4. Déterminer l'ordre de négligeabilité de f, g et h en $+\infty$ puis conclure.
5. *Généralisation :* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(P_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant la condition suivante :

$$\forall k \in [\![1, n[\![, P_{k+1}(x) - P_k(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

   Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $f_k : x \mapsto \mathbf{e}^{P_k(x)}$. Montrez que la famille $(f_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est libre.