Devoir surveillé $n°4$ du samedi 14 décembre 2024

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Durée : 2h.

L'usage de la calculatrice est interdit

Exercice 1 : suites définies par un système de récurrences

On considère les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} &= 2x_n - y_n \\ y_{n+1} &= 2y_n - x_n \end{cases}$$

Nous allons voir trois méthodes différentes pour résoudre ces relations de récurrences conjointes.

1. *Première méthode.*
   (a) Trouver une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 pour la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) En déduire l'expression de x_n puis de y_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
2. *Deuxième méthode.*
   (a) Déterminer un réel a tel que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_n = x_n + a\,y_n$ soit constante.
   (b) Déterminer un réel $b \neq a$ tel que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $t_n = x_n + b\,y_n$ soit géométrique.
   (c) En déduire les expressions de x_n et y_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. *Troisième méthode.*
   (a) Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   (c) Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut J^0 ?
   (d) Trouver des réels λ et μ tels que $A = \lambda I_2 + \mu J$.
   (e) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
   (f) Retrouver ainsi l'expression de x_n et y_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 : irrationalité du nombre d'Euler

Le but de cet exercice est de démontrer que le nombre $e = \exp(1)$ est irrationnel.

On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad b_n = a_n + \frac{1}{n!} \qquad I_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\,\mathbf{e}^t\,\mathrm{d}t$$

1. Étudier la stricte monotonie des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in[\![2,+\infty[\![}$.
2. Démontrer que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite. On ne demande pas pour l'instant de calculer cette limite.

3. Déterminer une constante $K \in \mathbb{R}_+^*$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \leqslant \dfrac{K}{n!}$.
4. En déduire la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Calculer I_0 et I_1.
6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = I_n - \dfrac{1}{(n+1)!}$.
7. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + I_n = e$.
8. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$.
9. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n < e < b_n$.
10. Supposons que e soit un nombre rationnel, que l'on écrit sous la forme $\dfrac{p}{q}$, avec p et q dans $\mathbb{N}^*$.
    (a) Justifier que le nombre $q!\, a_q$ est un entier.
    (b) Montrer que $q!\, a_q < (q-1)!p < q!\, a_q + 1$.
    (c) Conclure.

Exercice 3 : une équation fonctionnelle

Déterminer l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(\mathrm{Arctan}(x))$.