Devoir surveillé $n°4$ du samedi 21 janvier 2023

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Le sujet est composé de 3 parties indépendantes. Durée : 3h.

L'usage de la calculatrice est interdit

Partie I : valeur exacte de $\cos(\frac{2\pi}{5})$

On considère le polynôme $P = X^5 - 1$ de $\mathbb{R}[X]$.
Le but de cet exercice est de déterminer la valeur exacte du réel $\alpha = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.
On pose aussi $\beta = \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

1. Sans effectuer de division euclidienne, justifier que le polynôme $X - 1$ divise le polynôme P.
2. En effectuant une division euclidienne, déterminer le quotient de P par $X - 1$.
   On notera Q ce quotient.
3. Donner les racines cinquièmes de l'unité, puis décomposer le polynôme P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
4. En déduire une écriture factorisée de Q dans $\mathbb{R}[X]$.
5. Développer cette dernière expression et en déduire la valeur des réels $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$.
6. En déduire la valeur exacte de α.

Partie II : une équation dans $\mathbb{R}[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note

$$(E) : (X - 1)P' = nP$$

l'équation d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$.

On remarque d'abord que le polynôme nul est solution de (E). Ensuite, pour déterminer l'ensemble des solutions non nulles de (E), nous effectuons un raisonnement par analyse-synthèse qui est guidé ci-dessous.

Analyse :
On suppose que l'équation (E) admet une solution non nulle que l'on note P.

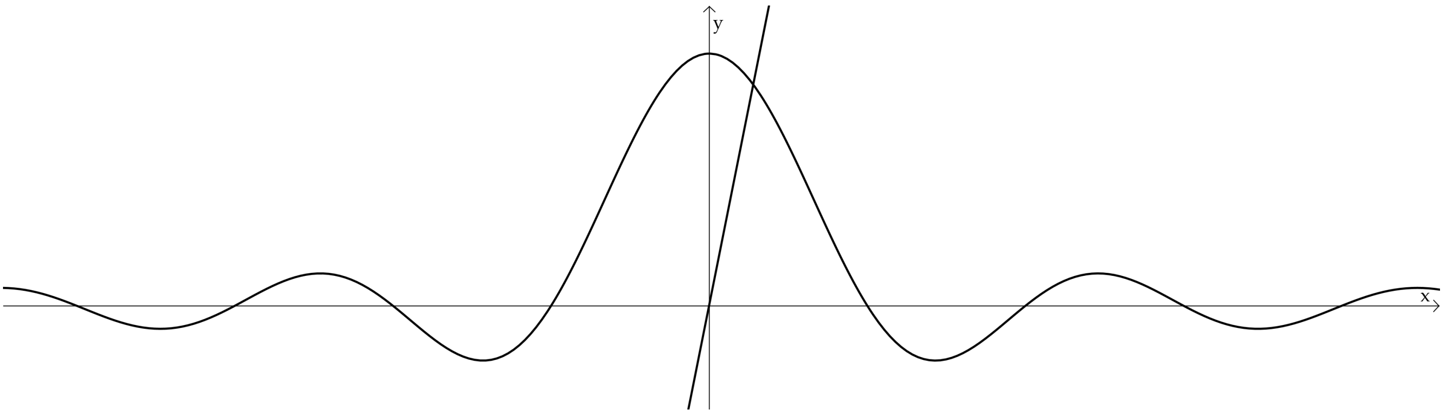
1. En utilisant un argument sur les coefficients dominants, déterminer le degré de P.
2. (a) Démontrer que 1 est une racine de P.
   (b) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(X - 1)P^{(k+1)} = (n - k)P^{(k)}$.
   (c) Déterminer la multiplicité de 1 en tant que racine de P.
3. Quelle est la forme de P ? Justifier.

Synthèse et conclusion :

4. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Partie III : étude du point fixe du sinus cardinal

On s'intéresse à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée sinus cardinal.
On a représenté ci-dessous sa courbe $\mathscr{C}_f$, ainsi que la droite d'équation $y = x$.



On considérera aussi la fonction auxiliaire $g : x \mapsto x\cos(x) - \sin(x)$.

1. Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
2. Montrer que f est une fonction paire, et étudier ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
5. Le but de cette question est de montrer que f est dérivable en 0.
   (a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leqslant |x|$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. En utilisant l'égalité des accroissements finis, montrer qu'il existe un réel a_x compris entre 0 et x tel que $g(x) = -a_x \sin(a_x)\, x$.
   (c) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ |f'(x)| \leqslant |x|$.
   (d) Conclure, en précisant la valeur de $f'(0)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note I_k l'intervalle $[k\pi, (k+1)\pi]$.

6. Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle I_0.
7. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer sans calcul qu'il existe un réel $\alpha_k \in \,]k\pi, (k+1)\pi[$ tel que $f'(\alpha_k) = 0$.
   (b) Montrer, à l'aide de la fonction g, qu'un tel réel α_k est unique.
   (c) Étudier les variations de f sur l'intervalle I_k. On pourra distinguer plusieurs cas.
8. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \leqslant \dfrac{x^2}{2}$. *On montre de la même manière que* $g(x) \geqslant -\dfrac{x^2}{2}$.
   (b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
9. Montrer que f admet un unique point fixe c dans $\mathbb{R}$, et que ce point fixe appartient à $]0, 1[$.
10. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = 0$ et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
    (a) Montrer que $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
    (b) Montrer que $|u_{n+1} - c| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - c|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
    (c) En déduire que la suite (u_n) converge vers c.
    (d) Déterminer un entier naturel n explicite tel que u_n soit une valeur approchée de c à 10^{-3} près.
    (e) Montrer que les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que :
    $$\forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - u_{n+1}| \leqslant \varepsilon \implies |u_n - c| \leqslant \varepsilon$$
    (f) Écrire une fonction Python qui prend un entrée un réel $\varepsilon > 0$ et renvoie une valeur approchée de c à ε près.