Devoir surveillé $n°3$ du samedi 10 décembre 2022

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Le sujet est composé de 6 parties indépendantes. Durée : 3h.

L'usage de la calculatrice est interdit

Autour de la fonction sinus hyperbolique

Partie I : Bijection

On étudie dans cette partie la bijectivité de la fonction sh.

1. Montrer que sh réalise une bijection. On précisera bien les ensembles de départ et d'arrivée.
2. Donner sans démonstration le tableau de variation de la bijection réciproque sh^{-1}.
3. Tracer sur le même graphique la courbe de sh et celle de sh^{-1}.
4. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de sh^{-1} puis calculer $(\mathrm{sh}^{-1})'$.
5. Calculer explicitement la bijection réciproque sh^{-1}.
6. Retrouver l'expression de $(\mathrm{sh}^{-1})'$ en dérivant celle obtenue pour sh^{-1}.

La bijection réciproque de sh *est communément notée* Argsh *i.e.* $\mathrm{sh}^{-1} = \mathrm{Argsh}$.

Partie II : Étude d'une suite définie par récurrence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \mathrm{sh}(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On souhaite étudier la nature de la suite (u_n).

1. Étudier le signe de $g : x \mapsto \mathrm{sh}(x) - x$.
2. Comparer u_0 et u_1. On pourra distinguer plusieurs cas selon u_0.
3. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de u_0.
4. Déterminer la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de u_0.

Partie III : Une famille de matrices

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose la matrice suivante : $M_x = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(x) & \mathrm{sh}(x) \\ \mathrm{sh}(x) & \mathrm{ch}(x) \end{pmatrix}$.

1. Calculer M_0.
2. Soient x et $y \in \mathbb{R}$. Montrer que $M_x M_y = M_{x+y}$.
3. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la matrice M_x est inversible, et calculer son inverse.
4. Calculer $(M_x)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Écrire M_x comme combinaison linéaire de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et de $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ puis retrouver le résultat de votre calcul lors de la question précédente à l'aide du binôme de Newton.

Partie IV : Une équation différentielle

On souhaite résoudre l'équation différentielle (E) : $\mathrm{sh}(x)y' - \mathrm{ch}(x)y = \mathrm{sh}(x)$.

1. *Primitives utiles.*
   (a) Donner une primitive de $f : x \mapsto \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Déterminer une primitive de $g : x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$ sur $]1; +\infty[$.
   (c) En déduire une primitive de $h : x \mapsto \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. *Résolution de l'équation différentielle.*
   (a) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) A l'aide d'un taux d'accroissement, déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x}$.
   (c) Montrer que (E) n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Partie V : Égalité de deux fonctions

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}(x)) \text{ et } g(x) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right)$$

On souhaite montrer que $f = g$.

1. *A l'aide des dérivées.*
   (a) Montrer que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leur dérivée.
   (b) En déduire que $f = g$ sur $\mathbb{R}$.
2. *A l'aide de la fonction tangente.*
   (a) En justifiant l'existence des expressions, montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(2f(x)) = \tan(2g(x))$.
   (b) En déduire que $f = g$ sur $\mathbb{R}$.

Partie VI : Étude d'une suite définie explicitement

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in [\![2; +\infty[\![$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{np} \mathrm{sh}\left(\frac{1}{k}\right)$. On souhaite étudier la nature de la suite (u_n).

1. *Inégalités utiles.*
   On souhaite démontrer l'inégalité suivante : $\forall x \in]0; 1[,\quad 1 + x \leqslant \mathbf{e}^{\mathrm{sh}(x)} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.
   (a) Montrer que l'équation $2\mathrm{sh}(x) + 1 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On la note α.
   (b) Soit $u : x \mapsto \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}(x)$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) \geqslant 0$.
   (c) Etudier les variations de la fonctions $f : x \mapsto \mathbf{e}^{\mathrm{sh}(x)} - x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
   (d) Démontrer l'inégalité souhaitée.
2. *Nature de la suite.*
   (a) Déduire de la partie précédente que

$$\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leqslant u_n \leqslant -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right)$$

   (b) En déduire que (u_n) converge et préciser sa limite.
   (c) Commenter votre résultat pour $p = 1$.