Devoir surveillé $n°2$ du samedi 15 octobre 2022

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Durée : 3h.

L'usage de la calculatrice est interdit

Exercice 1: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer :

   (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2^i$ (b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$ (c) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j)$

2. Vérifier les expressions obtenues dans la question précédente pour $n = 2$.

Exercice 2:
Soient trois ensembles E, F et G, et soient deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
Démontrer les implications suivantes :

1. $g \circ f$ injective $\implies$ f injective ;
2. $g \circ f$ surjective $\implies$ g surjective ;
3. $g \circ f$ injective et f surjective $\implies$ g injective ;
4. $g \circ f$ surjective et g injective $\implies$ f surjective .

Exercice 3:
Soient x un réel de l'intervalle $]0\,;2\pi[$ et n un entier strictement positif.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}$.
2. En déduire l'égalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} k\sin(kx) = \frac{(n+1)\sin(nx) - n\sin\big((n+1)x\big)}{2 - 2\cos(x)}.$$

Exercice 4:
Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Exercice 5:

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Justifier qu'il existe des entiers naturels a et b, avec b impair, tels que $k = 2^a b$.
   (b) En déduire que si $2^k + 1$ est un nombre premier, alors k est une puissance de 2.

On appelle **nombre de Fermat** un entier de la forme $F_n = 2^{(2^n)} + 1$, avec $n \in \mathbb{N}$.

2. Les nombres F_n, pour $n \in [\![0;3]\!]$, sont-ils premiers ? Justifier votre réponse.
3. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \neq m$.
   (a) Montrer que $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$.
   (b) Montrer par récurrence que $F_n = 2 + \prod_{i=0}^{n-1} F_i$.
   (c) Déterminer $F_n \wedge F_m$.