Devoir surveillé $n°2$ du samedi 12 novembre 2024

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Durée : 2h.

L'usage de la calculatrice est interdit

Exercice 1: [3pts]

Résoudre les équations suivantes d'inconnue réelle x :

(a) $|x+3| = x+1$ (b) $\lfloor x-1 \rfloor = -1$ (c) $|x-1| + |x+1| = 2$

Exercice 2: [9pts]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On note $A_n = \sum_{k=1}^{n} k$, $B_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ et $C_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} j^2$.
   (a) Rappeler les valeurs de A_n et B_n.
   (b) Montrer que : $T_n = \frac{1}{3}C_n + \frac{1}{2}B_n + \frac{1}{6}A_n$.
   (c) Intervertir les sommes dans T_n. En déduire que $T_n = (n+1)B_n - C_n$.
   (d) Déduire des questions précédentes que $C_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.
2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $S_{n,p} = \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=0}^{p} (k+j)$.
   (a) Exprimer $S_{n,0}$, $S_{n,1}$ et $S_{n,2}$ en fonction de A_n, B_n et C_n.
   (b) En déduire les valeurs de $S_{n,0}$, $S_{n,1}$ et $S_{n,2}$ en fonction de n.
3. Soit $p \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $\dfrac{S_{n,p}}{(p+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \binom{k+p}{p+1}$.
   (b) Montrer que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\binom{k+p}{p+1} = \binom{k+p+1}{p+2} - \binom{k+p}{p+2}$.
   (c) En déduire la valeur de $S_{n,p}$.

Exercice 3: [6pts]

Soient $n, k \in [\![2, +\infty[\![$. On va montrer que $(n-1)n(n+1)$ n'est pas une puissance $k^{\text{ème}}$, c'est-à-dire que :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ (n-1)n(n+1) \neq m^k$$

1. Montrer que n et $n^2 - 1$ sont premiers entre eux.
2. En déduire que si $(n-1)n(n+1)$ est une puissance $k^{\text{ème}}$, alors n et n^2-1 en sont aussi.
3. Montrer que si n est une puissance $k^{\text{ème}}$ alors n^2 l'est également.
4. Montrer que $m_2^k - m_1^k \geqslant 1 + m_2$ où m_1 et m_2 sont des entiers tels que $1 \leqslant m_1 < m_2$.
5. Conclure.

Exercice 4: [9pts]

On considère, pour un sous-ensemble A de $\mathbb{N}$, l'application $\mathbb{1}_A : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ indicatrice de A.
On rappelle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{1}_A(n) = 1$ si $n \in A$, 0 sinon.

1. Si A est l'ensemble des entiers naturels pairs, l'application $\mathbb{1}_A$ est-elle injective ? surjective ?
2. Quels sont les sous-ensembles A de $\mathbb{N}$ pour lesquels $\mathbb{1}_A$ n'est pas surjective ?
3. Montrer que : $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2,\ \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$ et que $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$.
4. Exprimer $\mathbb{1}_{\overline{A}}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_{\mathbb{N}}$, puis $\mathbb{1}_{A\setminus B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$, $\mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_{\mathbb{N}}$.
5. Montrer que l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{N},\{0,1\}) \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array} \right.$ est bijective.
   Quelle est sa bijection réciproque ?
6. En déduire que : $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2,\ (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.