Devoir surveillé $n°1$ du samedi 24 septembre 2022

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Durée : 2h.

L'usage de la calculatrice est interdit

Exercice 1: [9pts]

1. Traduire avec les quantificateurs universels les assertions suivantes :
   (a) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est constante.
   (b) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est décroissante.
   (c) La fonction $f :]-1; 1[\to \mathbb{R}$ n'est pas majorée.
2. Pour chacune des propositions, donner la négation puis justifier si la proposition est vraie ou fausse.
   (a) $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ |x| < y$.
   (b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ |x| < y$.
   (c) $\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3,\ a^2 + b^2 = c^2 \implies (a = 0 \text{ ou } b = 0)$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser les expressions suivantes.
   (a) $\mathbf{e}^{3\mathbf{i}x} + \mathbf{e}^{-\mathbf{i}x}$ (b) $\cos(x) - \cos(3x)$ (c) $\sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x)$

Exercice 2: Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$ [3pts]

1. Conjecturer une expression simple de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer l'expression obtenue à la question précédente.

Exercice 3: Le but de cet exercice est de montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel. [3pts]

1. Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{6} \in \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.
3. En déduire que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 4: Le but de cet exercice est de construire un pentagone régulier à la règle et au compas. [9pts]
Considérons l'équation $(E) : z^5 - 1 = 0$, d'inconnue complexe z.

1. Donner les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ sous forme trigonométrique.
2. On va chercher les solutions sous une autre forme.
   (a) Déterminer le polynôme Q de degré 4 tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait :
   $$z^5 - 1 = (z - 1)Q(z).$$
   (b) Résoudre l'équation $Q(z) = 0$ en effectuant le changement d'inconnue défini par $Z = z + \dfrac{1}{z}$.
   Les quatre solutions s'expriment à l'aide de racines carrées.
3. En déduire les valeurs de : $\cos(2\pi/5)$, $\cos(4\pi/5)$, $\sin(2\pi/5)$, $\sin(4\pi/5)$.
   On doit trouver $\cos(2\pi/5) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points :

- B d'affixe $\mathbf{i}$,
- K d'affixe $-\frac{1}{2}$,
- J le point d'intersection du cercle de centre K passant par B avec la droite $(O, \vec{i})$ d'affixe positive,
- L le milieu de $[OJ]$.

4. (a) Construire sur une figure : le cercle de centre O de rayon 1 et les points O, B, K, J, L.

   (b) Calculer les longueurs OJ puis OL.

   On note ω le complexe égal à $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et A_k les points d'affixes w^k pour $k \in [\![0, 4]\!]$.

   (c) Déduire des questions précédentes que L est la projection orthogonale de A_1 sur l'axe des abscisses.

   (d) Rajouter, à la règle et au compas, les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 sur votre figure.