Concours blanc de mathématiques

Durée : 3h. L'usage de la calculatrice est interdit. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés.
Le sujet est composé de trois parties indépendantes : algèbre, probabilités et analyse.

Partie I : Algèbre

On note $q : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_4[X]$ l'application qui transforme tout polynôme $P \in \mathbb{R}_4[X]$ en le quotient de sa division euclidienne par $X - 1$.

1. Vérifier que $q(X^3 - 3X + 1) = X^2 + X - 2$.
2. Démontrer, avec soin, que l'application q est linéaire.
3. On note $\mathscr{C} = (1, X - 1, X^2 - 1, X^3 - 1, X^4 - 1)$.
   (a) Démontrer que la famille $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$.
   (b) Donner la factorisation de $X^n - 1$ par $X - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) En déduire les images par q des éléments de $\mathscr{C}$.
4. (a) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(q)$.
   (b) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(q)$.
   (c) Les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(q)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_4[X]$?
5. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.
   (a) Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(q)$ qui représente l'application linéaire q relativement aux bases $\mathscr{C}$ au départ et $\mathscr{B}$ à l'arrivée.
   (b) Déterminer les matrices de passage entre les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. On notera $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$ et $P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$ ces matrices.
   (c) Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(q)$ qui représente l'endomorphisme q relativement à la base $\mathscr{B}$.
   (d) Montrer, avec puis sans argument matriciel, que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(q)$ n'est pas inversible.
6. Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$. Déterminer le quotient de la division euclidienne de P par $X - 1$ c'est-à-dire l'image par q de P. On exprimera ce quotient en fonction des coefficients de P.

Partie II : Probabilités

Soit $p \in [0, 1]$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose :
- d'une pièce de monnaie truquée qui tombe sur pile avec une probabilité p,
- d'un jeu classique de 16 cartes contenant 4 valets, 4 dames, 4 rois et 4 as,
- d'un jeu dit « Dalton » de 16 cartes contenant 4 dames, 4 rois et 8 as.

Jeu n°1

On lance la pièce n fois de suite. À l'issue de chaque lancer, si on a obtenu pile on tire une carte dans le jeu classique et si on a obtenu face on tire une carte dans le jeu « Dalton ». On remet toujours la carte choisie dans son jeu d'origine en prenant soin de mélanger le jeu en question.
On note (Ω, P) l'espace probabilisé qui modélise cette expérience aléatoire et N la variable aléatoire égale au nombre d'as obtenus à l'issue des n tirages.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer la probabilité d'obtenir un as au i-ème tirage. Cette probabilité est indépendante de i. On la note p_a.
2. Reconnaître la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire N. *On justifiera brièvement.*
3. En déduire l'espérance de N. On notera E_1 cette espérance.

Jeu n°2

On change d'expérience aléatoire et par conséquent on oublie les notations introduites précédemment.
Dans cette partie, on lance toujours la pièce n fois de suite. Par contre :
$\star$ à l'issue du premier lancer, si on a obtenu pile on tire une carte dans le jeu classique et si on a obtenu face on tire une carte dans le jeu « Dalton », et on remet toujours la carte choisie dans son jeu d'origine, comme dans le jeu n°1.
$\star$ à l'issue des lancers suivants, si la carte obtenue au coup précédent n'est pas un as alors on choisit une carte en suivant les mêmes règles que dans le jeu n°1, et si la carte obtenue au coup précédent est un as alors on fait le contraire : si on a obtenu pile, on tire une carte dans le jeu « Dalton » et si on a obtenu face on tire une carte dans le jeu classique. On remet toujours la carte dans son jeu d'origine.

On note à nouveau (Ω, P) l'espace probabilisé qui modélise cette nouvelle expérience aléatoire et N la variable aléatoire égale au nombre d'as obtenus à l'issue des n tirages. *Attention, ces mêmes notations dans le jeu n°2 représentent des objets différents de ceux du jeu n°1 et leur fonctionnement est à priori différent.*

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on définit la variable aléatoire X_i qui vaut 1 si on a obtenu un as au i-ème tirage et 0 sinon, et on note p_i la probabilité que la variable aléatoire X_i prenne la valeur 1.

4. Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$.
   (a) Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{(X_i=1)}(X_{i+1} = 1)$ et $P_{(X_i=0)}(X_{i+1} = 1)$.
   (b) En déduire l'expression de p_{i+1} en fonction de p_i et de p.
   (c) En déduire que $p_i = \frac{2-p}{5-2p}\left(1 - \left(\frac{2p-1}{4}\right)^i\right)$.
5. Exprimer N en fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Calculer l'espérance de N. On notera E_2 cette espérance.

Partie III : Analyse

On considère la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t+\sin(t)}\,\mathrm{d}t \end{array}$$

1. Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le signe strict de $t + \sin(t)$.
2. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.
3. Étudier la parité de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$. Il suffit donc à présent d'étudier f sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
5. En déduire que la fonction f a des variations opposées à celle de cosinus sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. Étudier le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.
7. Limite en $+\infty$
   (a) Déterminer un équivalent simple de $t \mapsto \frac{1}{t+\sin(t)}$ en $+\infty$.
   (b) Démontrer que, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\left|f(x) - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t(t+\sin(t))}\,\mathrm{d}t$.
   (c) Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $t \in [\![m, +\infty[\![$, $t + \sin(t) \geqslant \frac{t}{2}$.
   (d) En déduire que f admet une limite finie en $+\infty$. Préciser la valeur de cette limite.
8. Limite en 0
   (a) Déterminer un équivalent simple de $t \mapsto \frac{1}{t+\sin(t)}$ en 0.
   (b) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ tels que : $\lim\limits_{t\to 0^+} \varepsilon(t) = 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{t+\sin(t)} = \frac{a}{t} + \frac{\varepsilon(t)}{t}$.
   (c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe $\eta_\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall x \in]0, \eta_\alpha]$, $\left|\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \alpha$.
   (d) En déduire que f admet une limite finie en 0^+. Préciser la valeur de cette limite.
9. En déduire que f se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.