Concours blanc de mathématiques

Durée : 4h. L'usage de la calculatrice est interdit. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés.
Le sujet est composé de trois parties indépendantes : analyse, probabilités et algèbre. Celles-ci sont à traiter sur trois copies distinctes.

Analyse

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

Notons $I =]-\infty, 1[$ l'intervalle de $\mathbb{R}$ et a la fonction définie sur I telle que $a : x \mapsto \frac{2-x}{(1-x)^2}$.

1. Montrer que la fonction a est continue sur I. Est-elle prolongeable par continuité en 1 ?
2. Déterminer la décomposition en éléments simples de a sur I.
3. Déterminer une primitive de la fonction a sur I. On notera A cette primitive.
4. Notons (E) l'équation différentielle : $(1-x)^2 y' = (2-x)\, y$. Résoudre (E) sur I.

Partie B : Étude des dérivées successives d'une fonction f

Notons f la fonction définie sur I telle que $f : x \mapsto \frac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}}$.

5. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I puis énoncer le nom du théorème qui stipule que f admet un développement limité en tout point de I et à tout ordre.
6. Calculer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 3.
7. Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que :
$$\forall x \in I, f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}.$$
La preuve permet d'exprimer P_{n+1} en fonction de P_n et P'_n ; expliciter cette relation pour $n \in \mathbb{N}$.
8. Préciser P_0, P_1, P_2 et P_3.
9. En dérivant n fois les deux membres de l'équation (E), prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$P_{n+1} = \left[(2n+1)\, X + X^2\right] P_n - n^2 X^2 P_{n-1}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $a_n = f^{(n)}(0)$.

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer a_{n+1} en fonction de n, a_n et a_{n-1}.
11. (a) Préciser, sans nouveau calcul : a_0, a_1, a_2, a_3. En déduire a_4.
    (b) Préciser le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 4.
12. On désigne par (u_p) la suite définie pour tout entier naturel p par : $u_p = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!}$.
Sans démonstration, rappeler que (u_p) converge et préciser sa limite.

Pour tout $p, n \in \mathbb{N}$, on pose $S_p(n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$.

13. (a) Exprimer $S_p(0)$ et $S_p(1)$ à l'aide de u_p et u_{p-1} pour $p \geqslant 1$.
    (b) Prouver que les suites $(S_p(0))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_p(1))_{p\in\mathbb{N}}$ convergent et préciser leur limite.
14. Prouver que quels que soient les entiers p et n supérieurs ou égaux à 1 :
$$S_p(n+1) - (2n+2)\, S_p(n) + n^2 S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)$$
15. En déduire que pour tout entier naturel n, la suite $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ converge.
16. Prouver que :
$$a_n = \lim_{p\to+\infty} \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$$

Probabilités

On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

- si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
- si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.

Le premier objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n-ième tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du n-ième tirage dans un cas particulier. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n-ième tirage est blanche, 0 si la boule tirée au n-ième tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Partie A - Préliminaires

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'événement $(X_1 = 1)$. En déduire la loi de X_2.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est son support ?

Partie B - La loi de X_n

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Pour tout $k \in [\![b, n+b]\!]$, calculer $P(X_{n+1} = 1 | S_n = k)$.
5. A l'aide de la formule des probabilités totales, justifier que :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{E(S_n)}{b + r + n}.$$

6. Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie C - La loi de S_n dans un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Exprimer l'événement $(S_n = 1)$ avec les événements $(X_k = 0)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.
8. Montrer que $P(S_n = 1) = \frac{1}{n+1}$.

On admet dans la suite que l'on a de même $P(S_n = n + 1) = \frac{1}{n+1}$.

9. Soit $(k, \ell) \in [\![1, n+2]\!] \times [\![1, n+1]\!]$. Calculer la probabilité $P(S_{n+1} = k | S_n = \ell)$ dans chacun des trois cas suivants :

$$\bullet\ \ell \notin \{k-1, k\}, \qquad \bullet\ \ell = k - 1, \qquad \bullet\ \ell = k$$

10. Montrer que pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, on a la relation :

$$P(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k).$$

11. Montrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

Algèbre

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le déterminant de A. La matrice A est-elle inversible ?
2. On peut montrer par un calcul fastidieux que : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \det(A - \lambda I_4) = \lambda^4 - 7\lambda^3 + 18\lambda^2 - 20\lambda + 8$.
   Notons $Q = X^4 - 7X^3 + 18X^2 - 20X + 8$.
   (a) Montrer que 2 est racine de Q. Quel est sa multiplicité ?
   (b) Montrer que 1 est aussi racine de Q. En déduire que Q est scindé sur $\mathbb{R}$.
   (c) À l'aide des relations coefficients-racines, vérifier la pertinence des deux précédents résultats.
   (d) En déduire les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_4) \neq \{0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})}\}$.
3. On note $E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_4)$.
   Écrire E_1 comme un sous-espace vectoriel engendré puis déterminer une base de E_1.
4. On note $E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I_4)$.
   (a) Calculer le rang de $A - 2I_4$.
   (b) En déduire la dimension de E_2.
   (c) Montrer que $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiennent à E_2. En déduire une base de E_2.
5. A-t-on $E_1 \oplus E_2$?
6. A-t-on $E_1 \oplus E_2 = \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$?
7. Notons $\mathscr{F}$ la famille de $\mathbb{R}^4$ suivante $((-1,1,1,0),(0,1,1,0),(0,2,1,1),(1,0,0,1))$.
   (a) Montrer que la famille $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{F}$. Exprimer P.
   (c) Justifier que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (d) Rappeler la formule de changement de base qui exprime $\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(v)$ en fonction de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$ pour tout $v \in \mathbb{R}^4$. En déduire les coordonnées de $(2,2,1,3)$ dans la base $\mathscr{F}$.
8. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.
   (a) Exprimer $f(x,y,z,t)$ pour tout $x,y,z,t \in \mathbb{R}$.
   (b) Exprimer chaque élément de la famille $f(\mathscr{F})$ comme une combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{F}$. En déduire $\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(f)$.
   (c) Donner, sans justification, la relation qui lie A et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(f)$.
9. On définit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ suivant $p = (f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})^2$.
   (a) Montrer que p est un projecteur de deux façons différentes :
      - en utilisant les matrices dans la base $\mathscr{B}$;
      - en utilisant les matrices dans la base $\mathscr{F}$.
   (b) Déterminer les sous-espaces caractéristiques de p.