Concours blanc de mathématiques

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Durée : 3h.

L'usage de la calculatrice est interdit

Dans la suite de ce devoir, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite de Fibonacci, définie par :

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \end{cases}$$

Partie A : Préliminaires fibonacciens

Notons $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Montrer que $\varphi^2 = \varphi + 1$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \leqslant \varphi^n$.
3. Déterminer une expression explicite de f_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que $f_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$.

Partie B : Fibonacci, les séries et $\frac{1}{89}$

Soit $q \in \mathbb{R}$. On s'intéresse dans cette partie à la convergence de la série $\sum f_n q^n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k q^k$.

5. Montrer, sans faire de récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+2}(q) = q + qS_{n+1}(q) + q^2 S_n(q)$.
6. En déduire que si $|q| < \frac{1}{\varphi}$, alors la série $\sum f_n q^n$ converge absolument et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n q^n = \frac{q}{1-q-q^2}$.
7. On suppose dans cette question que $|q| > \frac{1}{\varphi}$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, la suite $(f_n|q|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. En déduire que la série $\sum f_n q^n$ diverge grossièrement.
8. Étudier la nature de la série $\sum f_n q^n$ quand $|q| = \frac{1}{\varphi}$.
9. À l'aide des résultats établis dans cette partie, expliquer rigoureusement l'affirmation suivante :

```
1/89 = 0.0
        + 1
        +  1
        +   2
        +    3
        +     5
        +      8
        +      13
        +       21
        +         etc...  Nombres de Fibonacci
        --------------------------------------------------
     =  0.0112359550...
```

Partie C : Fibonacci et l'algèbre linéaire

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{100} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$ et le vecteur-colonne $X_n = \begin{pmatrix} \frac{f_n}{10^n} \\ \frac{f_{n+1}}{10^{n+1}} \end{pmatrix}$ où $n \in \mathbb{N}$.

On définit également les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$, où $d_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{20}$ et $d_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{20}$.

10. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
11. Montrer que P est inversible, et déterminer son inverse.
12. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
13. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la première composante du vecteur $X_0 + \cdots + X_n$, puis la limite de celle-ci quand $n \to +\infty$.
14. Quel résultat venez-vous de (re-)démontrer ?

Partie D : Fibonacci et les polynômes

On définit les *polynômes de Fibonacci* de la manière suivante : $\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = XF_{n+1} + F_n \qquad (\star) \end{cases}$

15. Donner (sans expliciter les calculs) l'expression de F_2, F_3 et F_4 dans la base canonique.
16. Déterminer le degré de F_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ainsi que son coefficient dominant.
17. Combien vaut $F_n(1)$ et $F_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?
18. Soit $t \in]0, \pi[$ et $x = 2\mathbf{i}\cos(t)$.

    Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n(x) = \dfrac{\alpha(x)^n - \beta(x)^n}{\alpha(x) - \beta(x)}$, où $\alpha(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ et $\beta(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$.
19. Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$, on pose $z_k = \frac{\mathbf{i}k\pi}{n}$ et $x_k = 2\mathbf{i}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
    (a) Montrer que $\alpha(x_k) = \mathbf{i}e^{-z_k}$ et $\beta(x_k) = \mathbf{i}e^{z_k}$. En déduire que x_k est racine de F_n.
    (b) Donner alors l'écriture en produit d'irréductibles de F_n dans $\mathbb{C}[X]$.
    (c) On suppose de plus que n est pair. Montrer que : $F_n = X \displaystyle\prod_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \left(X^2 + 4\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$.
    (d) Proposer une factorisation similaire dans le cas où n est impair.
    (e) En déduire une expression « trigonométrique » de f_n en fonction de n.
20. Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$.
    (a) Sur Wikipedia, on peut lire :

    "Si $F(n,k)$ est le coefficient de X^k dans F_n, c'est-à-dire que $F_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} F(n,k)X^k$, alors $F(n,k)$ est le nombre de façons d'écrire $n-1$ comme une somme ordonnée de 1 et de 2, avec exactement k apparitions de 1. Par exemple, $F(6,3) = 4$ et 5 peut s'écrire de 4 façons, $1+1+1+2$, $1+1+2+1$, $1+2+1+1$, $2+1+1+1$, comme somme de 1 et de 2 avec exactement trois 1. Déterminant la position des 1 dans une telle somme, il devient alors évident que $F(n,k)$ est égal à …"

    Justifier ce propos et compléter[1] la fin de la phrase avec un coefficient binomial.
    Pour le coefficient binomial, on pourra distinguer selon si n et k ont la même parité ou non.
    (b) En déduire une expression « combinatoire » de f_n en fonction de n.
21. Vérifier vos deux expressions de f_n pour $n \in [\![2; 4]\!]$.

1. Pas si évident que ça ...